I -БАП

КИРИШҮҮ

Бул бапта диссертациянын темасы боюнча адабияттык кайталоо баяндалган жана жумушта колдонулган кээ бир жыйынтыктар башка булактардан алынып келтирилген. Бир түрдүүлүк үчүн кээ бир жумуштарда белгилөөлөр алмаштырылды.

§ 1.1. Айрым туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин чыгарымдуулугу боюнча жумуштардын баяндамасы.

Адатта айрым туундулуу теңдемелер интегралдоого алынып келинүүчү, жекелик учурда экинчи тартиптеги теңдеменин баардык чыгарылыштарын табуу талап кылынбайт.

Кээ бир учурларда чыгарылыштарда, изделүүчү функция алдын ала коюлган шарттарды канаатандырган гана учурларды издейбиз.

Айрым туундулуу диффереციалдык теңдемелер теориясы механикада эле эмес, физиканын жаңы областарында: термодинамикада, электродинамикада, магнетизм теориясында негизги математикалык аппарат болуп саналат.

Айрым туундулуу диффереციалдык теңдемелер теориясы акыркы күндөрү жаңы идеяларды жана усулдарды, математикалык анализдин баардык өнүгүү жүрүшүнүн түзүлгөнүндө табулууда. Жекече учурда теңдеменин чыгарылышынын жашоо жана жалгыздык теоремасы пайда болду. Сызыктуу эмес айрым туундулуу диффереციалдык теңдемелердин чыгарымдуулугун изилдөө үчүн бир канча ар түрдүү усулдар иштелип чыккан. Мисалга жакшы белгилүү: мүнөздөгүчтүн классикалык усулу, Галеркина усулу, кошумча аргумент усулу. Кошумча аргумент усулунун жардамы менен биринчи тартиптен жогорудагы теңдемелердин чыгарымдуулугун изилдөөгө мүкүнчүлүк алынды[40].

Айрым туундулуу диффереациалдык жана айрым туундулуу интегро-дифферециалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугун изилдөө жүргүзүүгө мүмкүн болду [26, 27].

Мындай мамиленин маңызы чыгарылышты өзгөртүп түзүүнү табуу болуп саналат, баштапкы Коши маселеси ага эквиваленттүү болгон II түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесине алынып келинет, ага топологиялык усул-кысып чагылтуу принцибин колдонууга мүкүн болот.

1.1.1. [27]де алтынчы тартиптеги айрым туундулуу теңдеме каралган:

$$\frac{\partial^4 L[u]}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial^3 L[u]}{\partial x \partial y^2} | +2\beta \frac{\partial^3 L[u]}{\partial x^2 \partial y} + \left(\alpha^2 + 1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial y^2} + \left(\beta^2 + 1\right)\frac{\partial^2 L[u]}{\partial x^2} +$$

$$+ 4\alpha\beta \frac{\partial^2 L[u]}{\partial x \partial y} + 2\left(\alpha^2 + 1\right)\beta \frac{\partial L[u]}{\partial y} + 2\alpha\left(\beta^2 + 1\right)\beta \frac{\partial L[u]}{\partial x} + \left(\alpha^2 + 1\right)\left(\beta^2 + 1\right)L[u] =$$

$$= f\left(t, x, y, u(t, x, y), u_t(t, x, y), u_x(t, x, y), u_y(t, x, y)\right) \qquad (1.1.1)$$

баштапкы шарттар

$$u(0, x, y) = \varphi_1(x, y), \quad u_t(0, x, y) = \varphi_2(x, y) \qquad (1.1.2)$$

мында $L[u] = u_{tt}(t, x, y) + 2pu_t(t, x, y) + \left(p^2 + 1\right)u(t, x, y)$,

мында α, β, p — кандайдыр бир оң турактуулар,

$f\left(t, x, y, u, \nu, \mu, \omega\right) \in \overline{C}\left(D \times R \times R \times R \times R \times R\right)$;

$\varphi_i(x, y) \in \overline{C}^{(1,1)}\left(R \times R\right), \ (i = 1,2)$.

(1.1.1)-(1.1.2) Коши маселесинин чыгарылышы төмөндөгү түрдө изделет

$$u(t, x, y) = c(t, x, y) + \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{-\alpha(x-s)-\beta(y-\gamma)-p(t-\nu)} \sin(x-s)\sin(y-\gamma)\sin(t-\nu)Q(\nu, s, \gamma)d\gamma ds d\nu,$$

мында $c(t, x, y)$ - белгилүү функция

$c(0, x, y) = \varphi_1(x, y), \ \ c_t(0, x, y) = \varphi_2(x, y)$ барабардыктары аткарылуучу,

$Q(t, x, y)$ - аныктоону талап кылуучу белгисиз функция.

Андан кийин (1.1.1), (1.1.2) маселесинин чыгарылышын издөөгө чыгарылышты өзгөртүп түзүү усулун колдонуу, ага эквиваленттүү болгон сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышын табууга алынып келинет жана $Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын табууда кысып чагылтуу принциби колдонулат.

1.1.2. [26]чы жумушта өзгөртүп түзүү усулу сингулярдык козголгон экинчи тартиптеги буруу чекити менен дифференциалдык теңдемеге колдонулган.

$$\varepsilon y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x),\ \ (0\le x\le 1) \tag{1.1.3}$$

баштапкы шарттары менен:

$$y(0)=b_1,\ \ y'(0)=b_2 \tag{1.1.4}$$

мында $b_i - const>0,\ a(x), b(x),\ f(x)\in C[0,1]$ жана $a(x_k)=0,\ (k=\overline{1,N}),\ 0<x_k<1,\ x_k$ - берилген чекиттер.

Төмөндөгү өзгөртүп түзүүнү колдонобуз

$$y=b_1+b_2x+\int_0^x\int_0^s e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-s)+\frac{\beta v}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(v)\,dv\,ds,$$

мында $Q(x)$ - жаңы белгисиз функция, α,β - кандайдыр бир оң турактуулар. Андан кийин (1.1.3), (1.1.4) маселесин чыгарылышын табуу экинчи түрдөгү сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемесине алынып келинет.

1.1.3. Сызыктуу эмес айрым туундулуу үчүнчү тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдемесинин дээрлик солитон чыгарылыштар теориясына өзгөртүп түзүү усулу дагы колдонулган [38].

1.1.4. [60] жумушта айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жалгыздыгы жана бутактануучулугун издөө үчүн жалпы схемасы сунушталган.

Бул диссертациянын экинчи главасында өзгөртүп түзүү усулун андан ары иштеп чыгуу жана сызыктуу эмес айрым туундулуу дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын жетишээлик шарттарын табууда колдонулган.

§ 1.2. Өзгөчө чекити менен интегралдык теңдемелер системасы теориясы боюнча жумуштардын баяндамасы

Азыркы учурда интегралдык теңдемелер теориясына кызыгуу артууда, биринчи жактан механикада, физикада, техникада, биологияда жана башка предметтерде колдонуу кыйшайуусуз өсүүдө, экинчи жактан таза математиканын көптөгөн областарында: функционалдык анализ, функциялар теориясы, ыктымалдыктар теориясы ж.б. кесилиште чыгууда. Анын ичинде негизинен Вольтерра интегралдык теңдемесинин регулярдуу теориясына, Фредгольмдун биринчи жана экинчи түрдөгү теңдемелер теориясына, сингулярдык козголгон интегралдык теңдемелер теориясына көңүл бөлүнгөн.

Ошону менен бирге серпилүү теориясындагы кээ бир негизги маселелер [17], эсте сактоосу бар чөйрөсүндө толкундун таралуусу [50], динамикалык стационардык эмес башкаруу системасы кийинки таасири менен [52], өзгөчө чекити менен Волтерра интегралдык теңдемеси жана Волтерра интегро-дифференциалдык теңдемесине алынып келинет. Биринчи жолу өзгөчө чекити менен интегралдык теңдемеси Т.Лалеско тарабынан[88], В.Вольтерра тарабынан[92] каралган.

Регулярдык өзгөчө чекиттин айланасында Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышы Я.Горно [79-80] тарабынан изилдөө башталган. Андан кийин алар Т.Сато [89], Т.Такесада [91], Э.И.Грудо [18], Я.В.Быков [12], Н.А.Магницкий [51-52], Н.В.Донская, П.С.Панков [22], А.Асанов [3, 69], А.Б.Байзаков [8], С.Б.Тагаева [58] жумуштары менен улантылган.

Өзгөчө чекитти менен козголгон дифференциалдык теңдемелер Лайтхилла түрү жана алар үчүн баштапкы маселелер К.А.Алымкулов жана анын окуучулары менен изилденген [1, 67].

Т.Такесада [91] жумушунда регулярдык өзгөчө чекити менен сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемелер системасын изилдеген.

$$tu(t) = \int_0^t K(t,s)u(s)ds + f(t),\ f(0) = 0, \qquad (1.2.1)$$

оң бөлүгү *f(t)* жана *K(t,s)* ядросу координата башталышынын айланасында голоморфтуу. Кээ бир шарттардын аткарылуусунда, $K(0,0)$ матрицанын өздүк маанилерин, чыгарылыштын структурасы кеңейтилген жыйналуучу катар турундө, ал тарабынан табылган. Вольтерра интегралдык теңдемелер бир тектүү системалар түрү (1.2.1), теңдемени аныктоочу функциясы үзгүлтүксүз жана жылмакай шарттарын канааттандыруучу жана кээ бир шаттар канааттандырган, $K(0,0)$ матрицасынын өздүк маанисине дал келүүчү жана чыгарылышынын структурасы тургузулганы [8]жумушта изилденген.

[12] Жумушта төмөндөгү теңдеменин чыгарылышынын жүрүмү өзгөртүп түзүү усулу менен изилденген.

$$L[u(t)] \equiv \frac{du(t)}{dt} - H(t)u(t) - \int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t), \qquad (1.2.2)$$

$f(t)$ эркин мүчөнүн полюсунун айланасында.

Сызыктуу эмес Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемеси

$$t\frac{du}{dt} = \lambda u + \int_0^t K(t,s,u(s))ds + f(t)$$

$K(t,s,u)$ жана $f(t)$ голоморфтуу, божомолунда $t = s = u = 0$ жана $t = 0$ чекитинин айласында [25, 18]жумуштарда изилденген.

Сызыктуу эмес Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемесин карайлы

$$t\frac{du(t)}{dt} = \lambda u(t) + \int_0^t K(t,s,u(s),u^{\frac{p_1}{q_1}}(s),\dots,u^{\frac{p_k}{q_k}}(s))ds + f(t), \qquad (1.2.3)$$

мында $p_i > q_i > 1$ - бүтүн сандар, $i = 1, 2, \dots, k$.

Төмөнкү шарттарды коелу:

a) $K(t,s,u,w_1,\dots,w_k)$ -функциясы $t = s = u = w_1 = \dots = w_k = 0$ айланасында голоморфтуу жана $K(t,s,0,\dots,0) \equiv 0,\ \dfrac{\partial K(0,\dots,0)}{\partial u} = 0$;

b) $\dfrac{p_i}{q_i}\ (i = 1,\dots,k)$ - кыскарбаган бөлчөк;

c) $\operatorname{Re}\lambda > 0$;

d) $f(t) \equiv 0$.

(1.2.3) теңдемесинин жекече учуру , $K(t, s, u, w_1, ..., w_k)$ функциясы $w_1, ..., w_k$ дан көз каранды эмес болгондо, [6] жумушта изилденген.

Дифференциалдык теңдемелердин аналитикалык теориясынын бардык негизги түшүнүктөрү, регулярдуу өзгөчө чекит, бүтүн рангтуу иррегулярдуу өзгөчө чекит, өзгөчө чекиттин айланасында чыгарылыштын асимптотикалык көрүнүшү Вольтерра интегралдык теңдемесинин аналитикалык теориясына которулган [52]. Ошондой эле [52] регулярдуу жана иррегулярдуу өзгөчө чекити менен I жана III түрдөгү сызыктуу Вольтерра интегралдык теңдемесинин жана Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемесинин чыгарылышынын көп параметрлүү түркүмүнүн структурасы жана бул теңдемелердин системасынын чыгарылышы табылган. Андан сыткары чыгарылыштардын санынын жашоо көйгөйү жана алардын өзгөчө чекиттин айланасында асимптотикалык көрүнүшү изилденген.

Сызыктуу жанан сызыктуу эмес үчүнчү түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемелер системасынын чыгарылышынын жалгыздыгы жана регуляризациялоо көйгөйү М.И.Иманалиев, А.Асанов, ошондой эле А.Асанов [69] жумуштарында каралган. К.Б.Бараталиев тарабынан спектралдык теориянын негизи тургузулган жана үчүнчү түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемелерди регуляризациялоо усулу иштелип чыккан.

Ошондой болсо да сызыктуу жана сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемелер жана Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясынын көпчүлүк актуалдуу көйгөйлөрү дагы эле изилденбей калууда.

Ар түдүү маселелердин ичинен, теориянын өзүндө жана колдонулушунда регулярдык өзгөчө чекитке жакын сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемелер жана Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясынын чыгарылышынын аналитикалык жана асимптотикалык структурасынын көйгөйү талашсыз актуалдуу бойдон калууда.

§ 1.3. Изилдөөнүн жалпы схемасы жана жардамчы жыйынтыктары

Дифференциалдык теңдемелердин аналитикалык жана асимптотикалык теориясынын көптөгөн маселелеринде, интегралдык теңдемелерге чыгарылышты өзгөртүп түзүү усулу колдонулат. [23] жумуштун VIII бапы, берилген дифференциалдык теңдемелерди интегралдоого же анын чыгарылыштарынын касиеттерин изилдөөгө мүмкүндүк берүүчү өзгөртүп түзүү усулуна арналган.

Чыгарылышты өзгөртүп түзүү усулунун алгебралык-функционалдык негизин келтиребиз.

Мейли Ω - кандайдыр бир көптүк, A жана K операторлору аны өзүнө өзүн чагылтат. Теңдемени жана өзгөтүп түзүүнү карайлы:

$$Ax = b \tag{1.3.1}$$

мында Ω көптүгүндө b - белгиленген элемент

$$x = Ky. \tag{1.3.2}$$

(1.3.1) жана (1.3.2)ден:

$$AKy = b. \tag{1.3.3}$$

Мындан, эгерде тескери оператор жашаша $(AK)^{-1}$, анда төмөнкүнү алабыз:

$$y = (AK)^{-1}b \tag{1.3.4}$$

жана (1.3.4), (1.3.2) ден (1.3.1) теңдемесинин төмөнкү көрүнүштөгү чыгарылышына ээ болобуз

$$x = K(AK)^{-1}b.$$

Аныктама 1. K операторун, A операторунун чыгарылыштарын өзгөртүп түзүү оператору деп атайбыз.

Эскертүү 1. K операторун, (1.3.3) жаңы жөнөкөйлөтүлгөн оператордук теңдеменин чыгарылышынын жашашын далилдөөчү топологиялык усулдарды, мисалы кысып чагылтуу принцибин колдонууга мүмкүн болгондой тандаш керек.

Эскертүү 2. Белгилей кетиш керек, алдын ала K^{-1} тескери операторунун жашашын болжолдоп, эгерде (1.3.2)ни төмөнкүдөй түрдө жазсак

$y = Fx$, мында $F = K^{-1}$, анда 1 - аныктама өзүнө, интегралдык өзгөртүп түзүү усулдары, Фурье (Лаплас) $y = Fx$ өзгөртүп түзүүлөрүн да камтыйт. Ал зми, (1.3.4) тө $(AK)^{-1}$ тескери операторунун жашашы болжолдонот.

Мисал 1.3.1. [12, с.200] карайбыз

$$(t-a)\frac{du}{dt} = H(t)u(t) + \int_a^t N(t,s)u(s)ds, \tag{1.3.5}$$

мында $H(t), N(t,s)$ - $G_R^a = \{|t-a| < \rho, |s-a| < \rho\}$ областында голоморфтуу операторлор. Төмөнкү түрдөгү өзгөртүп түзүүнү колдонуу менен: $u(t) = (t-a)^{\beta}\varphi(t) \equiv K\varphi$, мында $\varphi(t)$ - голоморфтуу функция $|t-a| < \rho$ үчүн, (1.4.5) теңдемесинин чыгарылышынын аналитикалык туюнтмасы табылган.

(1.3.5) теңдемесинин ядросу жана коэффициенттеринин үзгүлтүксүздүгүн болжолдоо [22] жумушунда каралган. Бул учурда (1.3.5) теңдемесинин чыгарылышын табуу үчүн төмөнкү көрүнүштө чыгарылышты өзгөртүп түзүү усулу колдонулат

$$u(t) = t^{\beta}\left(c + \int_0^t y(s)ds\right) \equiv Ky. \tag{1.3.6}$$

Чыгарылышты өзгөртүп түзүү усулун (1.3.6) түрүндө колдонгондо белгисиз көз каранды өзгөрмө $y(t)$ карата теңдемелер системасын алабыз жана ага кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

Мисал 1.3.2. [51, с.233] Автономдуу системаны карайлы:

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \; i = 1,2,...,n \tag{1.3.7}$$

$x = (x_1,...,x_n) \equiv 0$ чекитинин айланасында, φ_i функциясы ошол айланада аналитикалуу деп болжолдойлу. (1.3.7) интегралдык ийри сызыктарынын жайгашуусун жаңы өзгөрмөнү кийирүү менен изилденет:

$$x_i = \xi_i(y_1, y_2, ..., y_n), \; \xi_i(0) = 0, \; i = 1,...,n. \tag{1.3.8}$$

Анда (1.3.7)системасы эң эле жөнөкөй түрдү кабыл алат:

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i, \quad i = 1,...,n. \tag{1.3.9}$$

Эгерде

а) Якоби матрицасынын бардык элементардык бөлүүчүлөрү $\left(\frac{\partial\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_j}\right)$ жөнөкөй болсо;

б) бул матрицанын тамырлары $\lambda_1,...,\lambda_n$ арасында

$$<p,\lambda>=0$$

сызыктуу катыштыгы жашабаса;

в) Якоби матрицасынын өздүк маанилери λ_j, координата башталышы аркылуу өткөн кандайдыр бир түз сызыктын бир жагында жайгашкан болсо,

анда координата башталышынын кандайдыр бир айланасында жыйналуучу (1.3.8) катары жашайт жана анын жардамы менен (1.3.7) системасы жөнөкөй (1.3.9) системасына алынып келиниши мүмкүн.

Мисал 1.3.3. [9, с.185] $t=0$ чекитинде регулярдуу өзгөчөлүккө ээ болгон Вольтерра теңдемелер системасын карайлы:

$$tu(t)=\int_0^t p(t,\tau)K(t,\tau)u(\tau)d\tau,\quad (0\le t\le T), \tag{1.3.10}$$

мында $u(t)-$ изделүүчү $n-$ өлчөмдүү вектор-функция, $K(t,\tau)-$ $n\times n$ өлчөмдүү квадраттык матрица, $p(t,\tau)-$ оң, бир тектүү, нөл даражалуу жана [0,1] аралыгында суммалануучу $\varphi(s)=p(1,s)$ функция. Төмөнкү сандарды кийребиз

$$\varphi_k=\int_0^1 s^k\varphi(s)ds.$$

Эгерде

а) *K(t,s)* матрицасы t боюнча k_0 тартипке чейин үзгүлтүксүз туундуга ээ болсо, мында k_0 төмөндөгү барабарсыздыктан аныкталат

$$\varphi_{k_0}<\left\{\max_{0<s<t<T}\|K(t,s)\|\right\}^{-1};$$

b) $K(0,0)$ матрицасы $\frac{1}{\varphi_0}$ санына жооп берген өздүк жана ага кошулган векторго ээ болсо,

c) $\frac{1}{\varphi_i}$ $(i=1,2,\dots,k_0-1)$; сандары $K(0,0)$ матрицанын өздүк сандары болуп эсептелбесе, анда $p(t)$, $q(t)$ көп мүчөлөрүнүн коэффициенттерин б.а. a_i, b_i $(i=\overline{1,k_0-1})$ сандарын, алар $[0, T]$ аралыгында үзгүлтүксүз функциялар боло тургандай тандоого болот.

Теңдеменин чыгарылышы төмөндөгү түрдө тургузулган

$$u(t) = p(t)\ln t + t^k u_k \ln t + q(t) + t^k v_k(t), \qquad (1.3.11)$$

мында

$$p(t) = a_0 + ta_1 + t^2 a_2 + \dots + t^{k-1} a_{k-1},$$
$$q(t) = b_0 + tb_1 + t^2 b_2 + \dots + t^{k-1} b_{k-1}.$$

Теорема 1.3.1. Эгерде a), b), c) шарттары аткарылса, анда (1.3.10) теңдемесинин (1.3.11) түрүндөгү чыгарылышы жашайт , мында $k = k_0$, $u_{k_0}(t)$ жана $v_{k_0}(t)$ $[0, T]$ аралыгында - үзгүлтүксүз функциялар , $p(t)$ жана $q(t)$ – даражасы $k_0 - 1$ ден ашпаган көп мүчөлөр.

I-Бап боюнча корутунду

Бул бапта керектүү түшүнүктөр жана аныктоолор келтирилген, диссертациянын темасы боюнча адабияттар баяндалган жана изилдөөнүн жалпы схемасы жана дифференциалдык теңдемелердин асимптотикалык жана аналитикалык теориясынын жардамчы натыйжалары берилген.