2-БАП

ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫ ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮ УСУЛУН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАЛЫК ТЕОРИЯСЫНДА КОЛДОНУУ

2-бапта чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулу айрым туундулуу дифференциалдык теңдемелердин баштапкы маселесинин чыгарылышын издөөгө колдонулган.

§ 2.1. Чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулун айрым туундулуу дифференциалдык тендемелердин баштапкы маселесинин чыгарылышын изилдөөгө колдонуу

Бул параграфта комплекстүү параметрлүү жана сызыктуу эмес экинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер жана теңдемелер системасы үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу аныкталды жана структурасы тургузулду.

I.Экинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесин карайлы:

$$\left(u_{tt}+u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}\right)+\alpha\left(u_t+i(u_x+u_y)\right)=f(t,x,y,u), \tag{2.1.1}$$

мында

$$i=\sqrt{-1},$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x)=\varphi(x,y), \tag{2.1.2}$$

$$u_t(0,x,y)+u_x(0,x,y)+u_y(0,x,y)=\psi(x,y). \tag{2.1.3}$$

Белгилөө жүргүзөбүз

$$u_t+i(u_x+u_y)\equiv z(t,x,y) \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) катнаштыктын эки жагын тең t боюнча дифференцирлеп, төмөнкүгө ээ болобуз

$$u_{tt}+i(u_{xt}+u_{yt})=z_t(t,x,y).$$

(2.1.4) чүдөн төмөнкүнү алабыз

$$i(u_{tx}+i(u_{xx}+u_{xy}))=iz_x(t,x,y),$$

$$i(u_{ty}+i(u_{xy}+u_{yy}))=iz_y(t,x,y).$$

Айрымасын түзөбүз

$$z_t-i(z_x+z_y)=u_{tt}+u_{xx}+u_{yy}+2u_{xy} \qquad (2.1.5)$$

(2.1.4) жана (2.1.5) эске алуу менен (2.1.1) теңдемени төмөнкүдөй жазабыз

$$z_t-i(z_x+z_y)+\alpha z=f(t,x,y,u) \qquad (2.1.6)$$

(2.1.6) теңдеменин чыгарылышы төмөнкү формула боюнча табылат:

$$z(t,x,y)=e^{-\alpha t}\psi(x+it,y+it)+$$
$$+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}f(s,x+i(t-s),y+i(t-s),u(s,x+i(t-s),y+i(t-s))ds. \qquad (2.1.7)$$

Чындыгында эле

$$z_t=-\alpha e^{\alpha t}\psi+ie^{-\alpha t}[\psi'_x+\psi'_y]+f(t,x,y,u(t,x,y)-$$
$$-\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}f(s,x(t,x,y),y(t,x,y),u(t,x,y))ds+ \qquad (2.1.8)$$
$$+i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}[(f_x+f_y)+f_u(u_x+u_y)]ds.$$

Андан кийин

$$z_x=e^{-\alpha t}\psi'_x(x+it,y+it)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[f_x+f_uu_x\right]ds \qquad (2.1.9)$$

$$z_y=e^{-\alpha t}\psi'_y(x+it,y+it)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[f_y+f_uu_y\right]ds \qquad (2.1.10)$$

(2.1.8) - (2.1.10) барабардыктарынан төмөнкүнү алабыз

$$z_t-i(z_x+z_y)=-\alpha e^{-\alpha t}\psi(x+it,y+it)+f(t,x,y,u)-$$

$$-\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}f\left(s,x+i(t-s),y+i(t-s),u(s,x+i(t-s)+y+i(t-s)\right)ds$$

Мындан (2.1.7) эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз

$$z_t-i\left(z_x+iy\right)+\alpha z=f(t,x,y,u)$$

б.а. биз (2.1.6) теңдемесин алдык.

(2.1.1)-(2.1.3) баштапкы маселесинин изделүүчү чыгарылышын төмөндөгү көрүнүштө көрсөтүүгө болот

$$u(t,x,y)=\boldsymbol{\varphi}(x-it,y-it)+\int_0^t z\left(\boldsymbol{\rho},x-i(t-\boldsymbol{\rho}),y+i(t-\boldsymbol{\rho})\right)d\boldsymbol{\rho}. \qquad (2.1.11)$$

(2.1.7) ден төмөнкүнү алабыз

$$z\left(\rho,x-i\left(t-\rho\right),y-i(t-\rho)\right)=e^{-\alpha\rho}\psi\left(x-i(t-\rho)+i\rho,y-\right.$$

$$\left.-i(t-\rho)+i\rho\right)+\int_0^\rho e^{-\alpha(t-s)}f\left(s,x-i(t-\rho)+i(\rho-s),y-i(t-\rho)+\right.$$

$$\left.+i(\rho-s),u(s,x-i(t-\rho)+i(\rho-s),y-i(t-\rho)+i(\rho-s)\right)ds= \qquad (2.1.12)$$

$$=e^{-\alpha\rho}\psi\left(x-it+2i\rho,y-it+2i\rho\right)+\int_0^t e^{-\alpha(\rho-s)}f\left(s,x-it+2i\rho-is,y-it+\right.$$

$$+2i\rho-is),u(s,x-it+2i\rho-is,y-it+2i\rho-is).$$

Анда (2.1.11)ден (2.1.12)ни эске алуу менен сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесинин экинчи тибин $u(t,x)$ боюнча туюнтулганын алабыз:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-it,y-it)+\int_0^t e^{-\alpha\rho}\psi\left(x-it+2i\rho,y-it+2i\rho\right)d\rho+$$

$$+\int_0^t\int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)}f\left(s,x-it+2i\rho-is,y-it+2i\rho-is,u(s,x-it+2i\rho-\right.$$

$$-is,y+it+2i\rho-is))dsd\rho\equiv PU. \qquad (2.1.13)$$

(2.1.13) дөн айрым туундуларын табабыз:

$$u_t=-i[\varphi_x\left(x-it,y-it\right)+\varphi_y\left(x-it,y-it\right)]+$$

$$+e^{-\alpha t}[\psi\left(x-it+2it,y-it+2it\right)]+(-i)\int_0^t e^{-\alpha\rho}[\psi_x(x-it+2i\rho,y-it+2i\rho)+$$

$$+\psi_y(x-it+2i\rho,y-it+2i\rho)]d\rho+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}f(s,x-it+2it-is,$$

$$y-it+2it-is,u(s,x-it+2it-is,y-it+2it-is))ds- \qquad (2.1.14)$$

$$-i\int_0^t\int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)}\left[f_x+f_y+f_u(u_x+u_y)\right]dsd\rho.$$

$$u_x=\varphi_x(x-it,y-it)+\int_0^t\int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)}[f_x+f_uu_x]dsd\rho+\int_0^t e^{-\alpha\rho}[\varphi_x]d\rho, \qquad (2.1.15)$$

$$u_y = \varphi_y(x-it, y-it) + \int_0^t \int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)} \left[f_y + f_u u_y \right] ds d\rho + \int_0^t e^{-\alpha\rho} [\varphi_y] d\rho. \qquad (2.1.16)$$

(2.1.15) жана (2.1.16)лерди i *ге* көбөйтүп жана (2.1.14) барабардыгы менен мүчөлөп кошуп төмөнкүнү алабыз:

$$u_t + i(u_x + u_y) = e^{-\alpha t}\psi(x+it, y+it) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} f(s, x+i(t-s), y+$$
$$+i(t-s), u(s, x+i(t-s), y+i(t-s))ds \equiv z(t,x,y). \qquad (2.1.17)$$

Байкалып тургандай, эгерде (2.1.17)де $t=0$ деп алсак, анда (2.1.3) баштапкы шарты аткарылат.

Эми (2.1.13) операторуна кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

(L) **Шарт.** Төмөнкү аткарылсын:

$$Q = \left\{ u(t,x,y) : u(t,x,y) \in \bar{C}^{(2,2,2)}\left(G_{T_0} \times C \times C\right) \cap \|u\| \le h \right\}. \qquad (2.1.18)$$

Белгилейбиз:

$$\left\| \varphi(x-it, y-it) + \int_0^t e^{-\alpha\rho}\psi\left(x-it+2i\rho, y-it+2i\rho\right) d\rho \right\| = q. \qquad (2.1.19)$$

$q + M\dfrac{T_0}{\alpha} \le h.$ барабарсыздыгынан T_0, h турактууларын аныктайлы.

мында

$$M = \max |f(s,x,y,u)|.$$

Анда оператор $Pu : Q \to Q$. Чынында эле (2.1.13) ден (L) шартын колдонуп төмөнкүнү алабыз

$$\|u\| \le q + M\int_0^t \int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)} ds d\rho = q + M\frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha\rho}(e^{\alpha\rho}-1)d\rho \le q + \frac{M}{\alpha}T_0 \le h.$$

Эми Pu оператору (2.1.13) барабардыгы менен аныкталган, кысып чагылуучу оператор болорун көрсөтөбүз:

$$\|Pu_1 - Pu_2\| \le \left\| \int_0^t \int_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)} \left[f\left(s, x-it+2i\rho-is, y-it+2i\rho-is,\right.\right.\right.$$
$$u_1(s, x-it+2i\rho-is, y-it+2i\rho-is)) - f\left(s, x-it+2i\rho-is, y-it+\right.$$

$$+2i\rho-is,u_2(s,x-it+2i\rho-is,y-it+2i\rho-is))]dsd\rho\le$$

$$\le L\left\|u_1-u_2\right\|\cdot\int\limits_0^t\int\limits_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)}dsd\rho\le L\frac{T_0}{\alpha}\left\|u_1-u_2\right\|.$$

Сызыктуу эмес (2.1.13) Вольтерра интегралдык теңдемеси (L) шартынан жана жогоруда алынган кысып чагылтуу принцибинин негизинде жалгыз гана чыгарылышка ээ:

$$u(t,x,y)\in\overline{C}^{(2,2,2)}(G_{T_0}\times C\times C).$$

Эми (2.1.1)-(2.1.3) баштапкы маселесинин дифференциалдык касиетин Q көптүгүндө карайлы. (2.1.11) жана (2.1.19) формулаларын колдонуп (2.1.11)ден төмөнкгүнү алабыз:

$$\left\|u(t,x,y)\right\|\le\left\|\varphi(x-it,y-it)+\int\limits_0^t e^{-\alpha\rho}\psi(x-it+2i\rho,y-it+2i\rho)d\rho\right\|+$$

$$+\left\|\int\limits_0^t\int\limits_0^\rho e^{-\alpha(\rho-s)}\,f\left(s,x-it+2i\rho-is,y-it+2i\rho-is,\right.\right.$$

$$\left.\left.u(s,x-it+2i\rho-is,y-it+2i\rho-is))dsd\rho\right\|\le q+M\frac{T_0}{\alpha}=const.$$

(2.1.15) жана (2.1.16)лардан ушундай эле жол менен u_x жана u_y тердин бир калыпта чектелүүсүн далилдөөгө болот. Анда (2.1.14)төн u_t нын бир калыпта чектелүүсү келип чыгат.

(2.1.11)ден (L) шарты боюнча u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, u_{tt} терди дагы бир калыпта чектелүүсүн көрсөтүүгө болот.

Көрүнүп тургандай, (2.1.11)ден $t=0$ болгондо (2.1.2)келип чыгат, ал эми (2.1.14)төн (2.1.15), (2.1.16)ларды эске алуу менен (2.1.3) баштапкы шартын алабыз.

Теорема 2.1.1. (L) шарты аткарылсын. Анда (2.1.1)-(2.1.3) баштапкы маселеси (2.1.11) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болгон

$$u(t,x,y)\in\overline{C}^{(2,2,2)}\left(G_{T_0}\times C\times C\right)$$

чыгарылышына ээ.

Жыйынтык. Экинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин жашашынын жетишээрлик шарттары табылды жана мындай чечимдин интегралдык көрүнүшү көрсөтүлдү.

II. Айрым туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышын карайлы

$$\begin{aligned}&u_{tt}(t,x,y)+2(u_{tx}(t,x,y)+u_{ty}(t,x,y))+u_{xx}(t,x,y)+2u_{xy}(t,x,y)+u_{yy}(t,x,y)+\\&+u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y))\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

баштапкы шаттары менен

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2.1.21}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y)\,. \tag{2.1.22}$$

(Т) Шарт. $\boldsymbol{\varphi}(x,y),\ \boldsymbol{\psi}(x,y)\in\bar{C}^2(R\times R)$ жана

$$\begin{aligned}&f(t,x,u)\in Lip\left(L_u\right)\cap\bar{C}^{(1,1)}\left([0,T]\times R\times R\times R\right),\\&LT_0<1, T_0<T_0.\end{aligned}$$

(Т) шарты боюнча (2.1.20) -(2.1.22) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесин алууга болорун көргөзөбүз

$$\begin{aligned}&u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}\eta(x-t,y-t)ds+\\&+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho d\rho\equiv Pu.\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Чындыгында эле, (2.1.23) түн эки жагын тең t, x жана y боюнча дифференцирлеп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned}&u_t=-[\varphi_x(x-t,y-t)+\varphi_y(x-t,y-t)]+e^{-t}\cdot\eta(x-t,y-t)+\\&-\int_0^t e^{-s}[\eta_x(x-t,y-t)+\eta_y(x-t,y-t)]ds+\\&+\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho)]d\rho+\\&+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[-(f_x+f_y+f_u(u_x+u_y)\right]d\rho\, ds;\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

$$u_x=\varphi_x(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta_x(x-t,y-t)]ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f_x+f_u u_x\right]d\rho ds \qquad (2.1.25)$$

$$u_y=\varphi_y(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta_y(x-t,y-t)]ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f_y+f_u u_y\right]d\rho ds. \qquad (2.1.26)$$

(2.1.24), (2.1.25) жана (2.1.26) барабардыктарын мүчөлөп кошуп төмөнкүнү алабыз:

$$u_t+u_x+u_y=\eta(x-t,y-t)e^{-t}+$$
$$+\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho. \qquad (2.1.27)$$

(2.1.27) туюнтмасынын эки жагын тең t боюнча дифференцирлейбиз:

$$u_{tt}+u_{tx}+u_{ty}=-[\eta_x(x-t,y-t)+\eta_y(x-t,y-t)e^{-t}+\eta(x-t,y-t)e^{-t}]+$$
$$+f(t,x,y,u(t,x,y))-\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho-$$
$$-\int_0^t e^{-(t-\rho)}[f_x+f_y+f_u\cdot[u_x+u_y]d\rho. \qquad (2.1.28)$$

Ушундай эле жол менен (2.1.27) туюнтмасын x, жана y боюнча эки жагын тең дифференцирлеп төмөнкгүнү алабыз:

$$u_{tx}+u_{xx}+u_{xy}=[\eta_x(x-t,y-t)]e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_x+f_u u_x\right]d\rho; \qquad (2.1.29)$$

$$u_{ty}+u_{xy}+u_{yy}=[\eta_y(x-t,y-t)]e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_y+f_u u_y\right]d\rho. \qquad (2.1.30)$$

(2.1.28), (2.1.29) жана (2.1.30) туюнтмаларын мүчөлөп кошолу:

$$u_{tt}+2(u_{tx}+u_{ty})+u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}=-[\eta(x-t,y-t)]e^{-t}-$$
$$-\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(x-t+\rho))d\rho+f(t,x,y,u). \qquad (2.1.31)$$

(2.1.31) ден, (2.1.27)ди эске алуу менен, (2.1.20) алабыз. (2.1.23) жана (2.1.24) ден төмөнкүлөр келип чыгарын байкайбыз:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y),,$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y)=-[\varphi_x(x,y)+\varphi_y(x,y)]+\eta(x,y).$$

Акыркы туюнтмадан төмөнкүнү табабыз:

$$\boldsymbol{\eta}(x,y)=\boldsymbol{\psi}(x,y)+[\boldsymbol{\varphi}_x(x,y)+\boldsymbol{\varphi}_y(x,y)]. \qquad (2.1.32)$$

Чындыгында, талап кылынган далилденди. Андан соң (2.1.23) сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесине кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

(К) **Шарт.**

$$Q=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T\right]\cap R\times R\right)\cap\|u\|\le h\right\}. \qquad (2.1.33)$$

T_0 , h чоңдуктары кийинчерээк аныкталат. Белгилөө жүргүзөлү:

$$\left\|\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}[\eta(x-t,y-t)]ds\right\|=q.$$

жана $q+MT_0\le h,$ барабарсыздыгынан T_0 жана h турактууларын аныктайбыз. Мында

$$M=\max|\, f(t,x,y,u)\,|.$$

(К) шартынын негизинде (2.1.23) төн төмөнкү барабарсыздыкка ээ болобуз:

$$\|Pu\|\le q+M\left\|\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}d\rho ds\right\|\le q+MT_0\le h. \qquad (2.1.34)$$

Демек, $Pu:Q\to Q.$

Эми Pu интегралдык оператору (2.1.23) формуласы менен аныкталган Q көптүгүндө кысуу оператору экендигин далилдейбиз. (К) шартын колдонуп, (2.1.23)төн төмөнкүнү алабыз:

$$\|Pu_1-Pu_2\|\le\left\|\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[\,f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u_1(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f(\rho,x-t+\rho,u_2(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))\right]\right\|d\rho ds\|\le$$

$$\le L\|u_1-u_2\|\cdot\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}d\rho ds\le LT_0\|u_1-u_2\|.$$

Жогоруда келип чыкандай сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемеси (2.1.23)кысып чагылтуу принцибинин негизинде жалгыз чыгарылышка ээ:

$$u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right).$$

Теорема 2.1.2. Эгерде (Т) шарты аткарылса, анда (2.1.20)-(2.2.22) баштапкы маселеси (2.1.23) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болгон жалгыз чыгарылышка ээ:

$$u(t,x,y)\in \bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right).$$

Натыйжа 2.1.2. Эгерде (2.1.20)нин оң жагы f, u дан көз каранды болбосо, анда (2.1.20)-(2.1.22) баштапкы маселесинин чыгарылышы квадратурада табылат:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\left[\psi(x-t,y-t)+[\varphi_x(x-t,y-t)]\right]\left(1-e^{-t}\right)+$$
$$+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(t,x-t+\rho,y-t+\rho)d\rho ds.$$

2.1.2 натыйжасынын далилдөөсү, (2.1.23), (2.1.32) катнаштыктарынан келип чыгат.

III. Андан ары, төмөнкү теңдемелер системасы:

$$u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+A(t,x,y)u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y)),\ t\in\left[0,T\right],\ x,y\in R, \qquad (2.1.35)$$

үчүн Коши маселесин карайбыз, баштапкы шарт:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y)\ , \qquad (2.1.36)$$

мында $f(t,x,y,u)-$ берилген n өлчөмдүү вектор-функция.

(С) **Шарт.** Мейли:

$$A(t,x,y)\in \bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right),$$

$$f(t,x,y,u)\in \bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L|_u\right),\ \varphi(x,y)\in \bar{C}^{1,1}(R\times R).$$

(С) шартынан

$$\|A(t,x,y)\|\le M_A=const$$

экенин алабыз.

(2.1.35),(2.1.36) Коши маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз: $u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds,$ (2.1.37)

Мында Q – белгисиз функция, α, β -кандайдыр бир оң сандар, алар бир аздан соң аныкталат. (2.1.37) катнаштыкты t жана x, y тер боюнча удаалаш дифференцирлеп төмөнкүлөрдү алабыз:

$$u_t(t,x,y) = -\left[\varphi_x(x-t,y-t)+\varphi_y(x-t,y-t)\right]+e^{\beta t}Q(t,x,y)-\alpha(u-\varphi)-$$

$$-\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}\left[Q_x(s,x-t+s)+Q_y(s,x-t+s)\right]ds;$$

$$u_x(t,x,y) = -\varphi_x(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q_x(s,x-t+s,y-t+s)ds;$$

$$u_x(t,x,y) = -\varphi_y(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q_y(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Мындан

$$u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y) = e^{\beta t}Q(t,x,y)-\alpha u+\alpha\varphi(x-t,y-t). \qquad (2.1.38)$$

(2.1.37) ди эске алуу менен:

$$\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]u = \left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\varphi(x-t,y-t)+\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\times$$

$$\times\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q\ (s,x-t+s,y-t+s)ds. \qquad (2.1.39)$$

(2.1.38) жана (2.1.39) катнаштыктарын мүчөлөп кошуп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u_t+u_x+u_y+A(t,x,y)u = f(t,x,y,u) = e^{\beta t}Q(t,x,y)+\alpha\varphi(x-t,y-t)+$$

$$+A(t,x,y)\varphi(x-t,y-t)-\alpha\varphi(x-t,y-t)+\left[A(t,x,y)-\alpha E\right]\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds.$$

Мындан (2.1.37)ди эске алып:

$$Q(t,x,y) = e^{-\beta t}[f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t)+e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\times$$

$$\times Q(s,x-t+s,y-t+s)ds)-A(t,x,y)\varphi(x-t,y-t)-\left[A(t,x)-\alpha E\right]e^{\beta t}\times$$

$$\times\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}Q(s,x-t+s,y-t+s)\,ds\Big]\equiv PQ. \qquad (2.1.40)$$

(2.1.40) интегралдык теңдемесин кысып чагылтуу принцибин колдонуу менен чыгарабыз.

Мейли $\Omega = \{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cup\|Q\|\le h\}$.

$T_0 < T$ жана h чоңдуктары бир аздан кийин аныкталаарын белгилеп кетели.

(2.1.40) ден (С) шартын эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|PQ\| \le e^{-\beta T} M + \frac{2}{\alpha+\beta}(M_A + n\alpha)h\,.$$

α, β ларды төмөнкү барабарсыздык аткарыла тургандай кылып тандайбыз:

$$\frac{2}{\alpha+\beta}((M_0 + \alpha n) + L) \le 1. \qquad (2.1.41)$$

$T_0 < T$ жана h тар үчүн төмөнкү барабарсыздык аткарылат деп эсептейбиз:

$$e^{-\beta T_0} M + \frac{2}{\alpha+\beta}(M_A + \alpha n)h \le h.$$

Анда оператор PQ Ω көптүгүн өзүнө өзүн чагылтат б.а.

$$Pu : Q \to Q.$$

Эми P оператору кысуу оператору экендигин көргөзөбүз. (C) шартын колдонуп (2.1.40) ден төмөнкүнү алабыз:

$$\begin{aligned}
&\|PQ_1 - PQ_2\| \le \Big\| e^{-\beta t}\Big[f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t)) + e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\, Q_1(s, x-t+s, y-t+s)ds) - \\
&- f(t,x,y,\varphi(x-t,y-t)) + e^{\beta t}\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}\, Q_2(s, x-t+s, y-t+s)ds) \Big]\Big\| + \\
&+ \left\| [A(t) - \alpha E]\int_0^t e^{-(\alpha+\beta)(t-s)}[Q_1(s, x-t+s, y-t+s) - Q_2(s, x-t+s, y-t+s)]ds \right\| \le \\
&\le \frac{2}{\alpha+\beta}((M_0 + \alpha n) + L)\|Q_1 - Q_2\|.
\end{aligned} \qquad (2.1.42)$$

Анда (2.1.42)ден Ω көптүгүндө PQ кысуу оператору экендиги келип чыгат. (2.1.40) теңдемеси кысып чагылтуу принциби боюнча $Q(t,x,y) \in \Omega$ жалгыз чыгарылышка ээ болот. Табылган функцияны (2.1.37) ге алып барып коюп, (2.1.35), (2.1.36) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми алынган жыйынтыктарды кыскача жазалы.

Теорема 2.1.3. (C) шарты аткарылсын. Анда $\exists\, T_0 > 0$ табылып, (2.1.35), (2.1.36) Коши маселесинин (2.1.37) түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон жалгыз чыгарылышы жашайт: $u(t,x,y) \in \bar{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0] \times R \times R\right)$

.

§ 2.2. Буруу чекити менен биринчи тартиптеги сингулярдуу козголгон айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу

Бул параграфта буруу чекити менен сингулярдуу козголгон айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселеси чыгарылышка ээ болоорлугу каралды:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin nt\,u(t,x)= f(t,x,u(t,x))+\int_0^t K\left(t,s,u(s,x)\right)ds\,, \qquad (2.2.1)$$

баштапкы шарты менен

$$u(0,x)=\varphi(x). \qquad (2.2.2)$$

(T) **Шарт.** $n\in N$ - бекитилген сан,

$f(t,x,u)\in \bar{C}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1\big|_u\right),\ \varphi(x)\in \bar{C}^1(R),$

$K(t,\tau,u)\in \bar{C}\left(\left(0\le\tau\le t\le T\right)\times R\right)\cap Lip\left(L_2\big|_u\right).$

(2.2.1)-(2.2.2) Коши маселесинин чыгарылышын төмөнкгү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s)ds\,, \qquad (2.2.3)$$

мында $Q(t,x)$ – аныктоону талап кылган, жаңы белгисиз функция; $\alpha,\beta\in R_+$ сандарынын маанилери төмөндө аныкталат. (2.2.3) катнаштыкты t жана x тер боюнча удаалаш дифференцирлеп, төмөнкүлөргө ээ болобуз:

$$u_t(t,x)=-\varphi'(x-t)+\frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x)-\frac{\alpha}{\varepsilon}(u-\varphi)-\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta}{\varepsilon}s}\frac{1}{\varepsilon}Q_x(s,x-t+s)ds; \qquad (2.2.4)$$

$$u_x(t,x)=\varphi'(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q_x(s,x-t+s)ds. \qquad (2.2.5)$$

Жогорудагыдан

$$u_t(t,x)+u_x(t,x)=\frac{1}{\varepsilon}e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x)-\frac{\alpha}{\varepsilon}u+\frac{\alpha}{\varepsilon}\varphi(x-t).$$

Теңдеменин эки жагын тең ε го көбөйтөлү:

$$\varepsilon(u_t+u_x)+\alpha u(t,x)=e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x)+\alpha\varphi(x-t). \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6) нын негизинде

$$\varepsilon(u_t+u_x)+\sin t\, u=e^{\frac{\beta t}{\varepsilon}}Q(t,x)-\left(\alpha-\sin t\right)u(t,x)+\alpha\varphi(x-t)\,.$$

Мындан (2.3.3)тү эске алып, төмөнкүнү алабыз:

$$Q(t,x)=e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left[f(t,x,u)+\int_0^t K(t,\tau,u(t,\tau))d\tau\right]+$$

$$+e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left(\alpha-\sin nt\right)\left[\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s)ds\right]-e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\alpha\varphi(x-t),$$

же

$$Q(t,x)=e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}f(t,x,\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s)ds+$$

$$+e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\int_0^t\left[K(t,s,\varphi(x-\tau)+\int_0^\tau e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-\tau+s)ds\right]d\tau+ \qquad (2.2.7)$$

$$+e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left(\alpha-\sin nt\right)\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s)ds+e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\sin nt\,\varphi(x-t)\equiv P\left[Q\right].$$

Экинчи түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемеси, (2.2.7) ге кысып чагылтуу принцибин колдонобуз. Ω:

$$\Omega=\{Q(t,x):Q(t,x)\in\overline{C}^{(1,1)}\left([0,T]\times R\right)\cup\|Q\|\le h\}$$

көптүгү болсун дейли, T жана h чоңдуктары төмөндө аныкталат.

(T) шартынын негизинде (2.2.7) ден төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\|PQ\|\le e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}\left[M_1+M_2T\right]+\left(\alpha+1\right)\int_0^t e^{-\frac{(\alpha+\beta)}{\varepsilon}(t-s)}\frac{1}{\varepsilon}\|Q(s,x-t+s)\|ds+e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}M_3\le$$

$$\le e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}}\left(M_1+M_2T+M_3\right)+\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}\|Q\|.$$

Мындан Ω көптүгүнүн аныктоосунун негизинде:

$$\|PQ\|\le e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}\left(M_1+M_2T+M_3\right)+\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}h.$$

Эгерде Т, α,β,h тарды төмөнкү барабарсыздык аткарыла тургандай тандасак:

$$e^{-\frac{\beta T}{\varepsilon}}\left(M_1+M_2T+M_3\right)+\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}h\le h, \qquad (2.2.8)$$

анда $P[Q]$ оператору Ω көптүгүн өзүнө- өзүн чагылтат: $P[Q]:\ \Omega\to\Omega$.

Эми P оператору - кысуу оператору экендигин көрсөтөбүз. (T) шартын колдонуп, (2.2.7) ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left\|P[Q_1]-P[Q_2]\right\| \le \left\| e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}} \left[f(t,x,\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q_1(s,x-t+s)ds) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f(t,x,\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q_2(s,x-t+s)ds) \right]\right\| +$$

$$+\left\| e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}} \left[\int_0^t K\left(t,s,\varphi(x-\tau)+\int_0^\tau e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q_1(s,x-\tau+s)ds\right) - \int_0^t K\left(t,s,\varphi(x-\tau)+\int_0^\tau e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\tau-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q_2(s,x-\tau+s)ds\right) \right]\right\| +$$

$$+\left\| e^{-\frac{\beta t}{\varepsilon}} (\alpha-\sin nt) \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \left[Q_1(s,x-t+s)-Q_2(s,x-t+s)\right]ds \right\| \le \left[\frac{L_1+L_2+(\alpha+1)}{\alpha+\beta}\right] \left\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\right\|,$$

мында $\|\sin nt\| \le 1, \ \forall n \in N$ экендиги эске алынды.

Эми α, β ларга төмөндөгү чектөөлөрдү киргизебиз:

$$\frac{L_1+L_2+(\alpha+1)}{\alpha+\beta} < 1. \qquad (2.2.9)$$

Анда (2.2.7) ден $P[Q]$ оператору Ω көптүгүндө кысуу оператору экендиги келип чыгат. (2.3.7) теңдемеси кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз чыгарылышка ээ $Q(t,x) \in \Omega$. Табылган функцияны (2.2.3) кө коюп (2.2.1)-(2.2.2) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми Коши маселесинин чыгарылышынын дифференциалдык касиеттерин изилдейбиз. Бардык $Q(t,x)$ тер үчүн (2.2.3) барабардыгынан төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$\|u(t,x)\| \le \|\varphi(x-t)\| + \left\| \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} Q(s,x-t+s)ds \right\| \le K_\varphi + e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}T} \frac{h}{\alpha+\beta} - K_0 = const.$$

Ушундай эле жол менен (2.2.4), (2.2.5) ден (2.2.1)теңдемесине кирген бардык туундуларды, бир калыпта чектелген экендигин көрсөтүүгө болот.

Жыйынтыгында төмөндөгү орун алат.

Теорема 2.2.1. (T) шарты (2.2.8), (2.2.9) үчүн аткарылсын. Анда $\exists T_0 > 0$ табылып, (2.2.1), (2.2.2) Коши маселесинин (2.2.3) интеграл түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон жалгыз чыгарылышы жашайт:

$$u(t,x) \in \overline{C}^{(1,1)}([0,T_0] \times R) .$$

§ 2.3. Экинчи тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугунун жетишээрлик шарттары

I. Бул параграфта экинчи тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугунун жана структурасын тургузуунун жетишээрлик шарттары табылды:

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} + 2u_{xy} = \lambda \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} K(t,x,y,\rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu)) d\nu d\gamma d\rho \qquad (2.3.1)$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \qquad (2.3.2)$$

$$u_t(0,x,y) = \psi(x,y), \quad x,y \in R . \qquad (2.3.3)$$

(В) **Шарт.** Функциялар $\varphi(x,y), \quad \psi(x,y) \in C^2(R \times R)$ жана $K(t,x,y,\rho,\gamma,\nu,u) \in \overline{C}^{(2,2,2,,0,0,0,0)}(D \times D \times R) \cap Lip(L|_u)$ болсун.

(2.3.1)-(2.3.3) Коши маселеси төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү:

$$u(t,x,y) = \varphi(x-it, y-it) + \int_0^t a(x - i(t-s) + is, y - i(t-s) + is) ds + \qquad (2.3.4)$$

$$+\lambda \int_0^t \int_0^s \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} K(s, x + i(t-s) - i(\sigma - s), y + i(t-s) - i(\sigma - s), \rho, \gamma, \nu, u(\rho,\gamma,\nu)) d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma \equiv Pu,$$

мында $a(x,y) = \psi(x,y) + i[\varphi_x^{'}(x,y) + \varphi_y^{'}(x,y)]$.

(2.3.4) төн удаалаш түрдө айрым туундуларын табабыз:

$$u_t = -i[\varphi_x'(x-it, y-it) + \varphi_y'(x-it, y-it)] + a(x+it, y+it) - i\int_0^t (a_x + a_y) ds +$$

$$+\lambda \int_0^t \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} K(\cdot) d\rho d\gamma d\nu ds +$$

$$+\lambda i \int_0^t \int_0^s \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} [K_x(\cdot\cdot) + K_y(\cdot\cdot)] d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma , \qquad (2.3.5)$$

мында $(\cdot), (\cdot\cdot)$ символдору төмөнкүнү белгилейт:

$$(\cdot)\equiv(s,x+i(t-s),y+i(t-s),\rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu)),$$
$$(\cdot\cdot)\equiv(s,x+i(t-s)-i(\sigma-s),y+i(t-s)-i(\sigma-s),\rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu)).$$

$$u_{tt}=i^2[\varphi''_{xx}(x-it,y-it)+2\varphi''_{xy}(x-it,y-it)+\varphi''_{yy}(x-it,y-it)]+i[a'_x+a'_y]-i[a'_x+a'_y]+$$
$$+i^2\int_0^t[a''_{xx}(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)+2a''_{xy}(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)+$$
$$+a''_{yy}(x-i(t-s,y-i(t-s)+is)+is)]ds++\lambda\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K(t,x,y,\rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu))d\rho d\gamma d\nu-$$
$$-\lambda i\int_0^t\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}[K_x(.)+K_y(.)]d\rho d\gamma d\nu ds+\lambda i\int_0^t\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}[K_x(\cdot)+K_y(\cdot)]d\rho d\gamma d\nu ds+$$
$$+\lambda i^2\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}[K_{xx}(\cdot\cdot)+2K_{xy}(\cdot\cdot)+K_{yy}(\cdot\cdot)]d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma, \qquad (2.3.6)$$

$$u_x=\varphi'_x(x-it,y-it)+\int_0^t a'_x(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)ds+\lambda\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K_x(\cdot\cdot)d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma,$$

$$u_{xy}=\varphi''_{xy}(x-it,y-it)+\int_0^t a''_{xy}(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)ds+\lambda\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K_{xy}(\cdot\cdot)d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma$$

$$u_{xx}=\varphi''_{xx}(x-it)+\int_0^t a''_{xx}(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)ds+\lambda\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K_{xx}(\cdot\cdot)d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma;$$

$$u_y=\varphi'_y(x-it,y-it)+\int_0^t a'_y(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)ds+\lambda\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K_y(\cdot\cdot)d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma,$$

$$u_{yy}=\varphi''_{yy}(x-it)+\int_0^t a''_{yy}(x-i(t-s)+is,y-i(t-s)+is)ds+\lambda\int_0^t\int_0^\sigma\int_0^T\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}K_{yy}(\cdot\cdot)d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma. \qquad (2.3.7)$$

(2.3.6), (2.3.7) деги табылган экинчи тартиптеги айрым туундуларды (2.3.1) теңдемесине коюп барабардык алабыз. Андан сыткары, эгерде, (2.3.4), (2.3.5) формулаларына *t=0* десек, анда (2.3.5) белгилөөсүнөн (2.3.2), (2.3.3) баштапкы шарттарын алабыз. Чындыгында, талап кылынган далилденди.

(2.3.1)-(2.3.3) Коши маселесинин чыгарымдуулугунун жашашы жана жалгыздыгын далилдөө үчүн (2.3.4) теңдемесине (б.а. $u=Pu$ оператордук теңдемесине, мында Pu - оператору (2.3.4) теңдемесинин оң жагынан аныкталган) кысып чагылтуу принцибин колдонобуз..

$Q=\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in C^{(2,2,2)}(D\times R)\cup\|u\|\le h\}$ болсун дейли.

$$\left\| \varphi(x-it, y-it) + \int_0^t a(x-it+2is, y-it+2is)ds \right\| = q, \qquad (2.3.8)$$

деп белгилейли.

q саны (2.3.8) формуласы менен аныкталсын дейли. Төмөнкү барабарсыздыктан h турактуусун аныктайлы:

$$q + |\lambda| L \frac{T_1 T_2 T^3}{2} h \le h \quad \text{же} \quad \frac{q}{1 - |\lambda| L \frac{T_1 T_2}{2} T^3} \le h. \qquad (2.3.9)$$

Анда Φu оператору Ω көптүгүн өзүнө өзүн которот .

Φu оператору кысуу оператору боло тургандыгын көрсөтөбүз. (2.3.4) ден Липшиц шартын колдонуп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|\Phi u_1 - \Phi u_2\| \le \left\| \lambda \int_0^t \int_0^s \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \left[K(s, x+i(t-s)-i(\sigma-s), y+i(t-s)-i(\sigma-s)\rho, \gamma, \nu, u_1(\rho,\gamma,\nu)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - K(s, x+i(t-s)-i(\sigma-s), y+i(t-s)-i(\sigma-s)\rho, \gamma, \nu, u_2(\rho,\gamma,\nu)) \right] d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma \right\| \le$$

$$\le |\lambda| L \frac{T_1 T_2 T^3}{2} \|u_1 - u_2\|.$$

(2.3.9)дан кошумча T, T_1, T_2 ды төмөнкү барабарсыздык аткарыла тургандай тандайбыз:

$$|\lambda| L \frac{T_1 T_2 T^3}{2} < 1. \qquad (2.3.10)$$

Анда кысып чагылтуу принцибинин негизинде (2.3.4) сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ болот.

Андан ары (2.3.1)- (2.3.3) Коши маселесинин чыгарылышынын касиеттерин изилдейбиз, (2.3.4)төн төмөнкүнү алабыз:

$$\|u\| = \left\| \varphi(x-it) + \int_0^t a(x-i(t-s)+is)ds \right\| +$$

$$+ \left\| \lambda \int_0^t \int_0^s \int_0^T \int_0^{T_1} K(s, x+i(t-s)-i(\sigma-s), \gamma, \rho, u(\rho,\gamma)) d\rho d\gamma ds d\sigma \right\| \le q_1 + |\lambda| N \frac{T_1 T^3}{2} = const.$$

Ушундай эле жол менен (2.3.6), (2.3.7)деги u_{tt}, u_{xx}, u_{yy} тер бир калыпта чектелгенин далилдөөгө болот.

Жыйынтыгында төмөндөгү далилденди.

Теорема 2.3.1. (B) шарты аткарылсын, анда $\exists \quad T_0 > 0$ жашап, (2.3.1)-(2.3.2) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот жана: $u(t,x,y) \in \overline{C}^{(2,2,2)}([0,T_0] \times R \times R)$.

II. Экинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемесинин Коши маселесинин чыгарылымдуулугун карайбыз:

$$\begin{aligned} &u_{tt} + 2(u_{tx} + u_{ty} + u_{xy}) + u_{xx} + u_{yy} + u_t + u_x + u_y = \\ &= f(t,x,y,u(t,x,y)), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

баштапкы шарттары менен:

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \tag{2.3.12}$$

$$u'(0,x,y) = \psi(x,y). \tag{2.3.13}$$

(T)**Шарт.** Берилген функциялар төмөнкүдөй болсун деп алалы: $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \overline{C}^2(R)$ жана

$$\mathrm{f}(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{u}) \in \mathrm{Lip}\left(\mathrm{L}\big|_{\mathrm{u}}\right) \cap \overline{\mathrm{C}}^{(1,1,1)}\left(\mathrm{D} \times \mathrm{R} \times \mathrm{R}\right).$$

$\max \mathrm{f}(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{u}) \le \mathrm{M},\ \mathrm{M} - \mathrm{const}.$ экендиги белгилүү.

Жогорудагы шарттарда Коши маселеси (2.3.11)-2.3.13) чындыгында төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемеге алынып келинет:

$$\begin{aligned} &u(t,x,y) = \varphi(x-t,y-t) + \int_0^t e^{-s} a(x-s,y-s)\,ds + \\ &+ \int_0^t \int_0^s e^{-(s-\rho)} f(\rho, x-t+\rho, y-t+\rho, u(\rho, x-t+\rho, y-t+\rho))\,d\rho\,ds, \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Мында $\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \psi(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \varphi'_{\mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y}) + \varphi'_{\mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Чындыгында эле, (2.3.14) функциясын эки бөлүгүн тең *t* жана *x, y* тер боюнча дифферецирлеп төмөнкүлөрдү алабыз:

$$\begin{aligned} &u_t = -[\varphi'_x(x-t,y-t) + \varphi'_y(x-t,y-t)] + e^{-t} a(x-t,y-t) - \int_0^t e^{-s}[a'_x(x-s,y-s) + a'_y(x-s,y-s)]\,ds + \\ &+ \int_0^t e^{-(t-\rho)} f(\rho, x-t+\rho, u(\rho, x-t+\rho))\,d\rho + \\ &+ \int_0^t \int_0^s e^{-(s-\rho)} \left[-f'_x - f'_u u'_x - f'_y - f'_u u'_y\right] d\rho\,ds; \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$u_x = \varphi'_x(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}a'_x(x-s,y-s)ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}[f_x+f_u u'_x]d\rho ds;$$

$$u_y = \varphi'_y(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}a'_y(x-s,y-s)ds+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f_y+f_u u'_y\right]d\rho ds.$$

Анда (2.3.15) тен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u_t+u_x+u_y=a(x-t,y-t)e^{-t}+ \\ +\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho. \tag{2.3.16}$$

(2.3.16) туюнтмасын эки бөлүгүн тең t боюнча дифференцирлейли:

$$u_{tt}+u_{tx}+u_{ty}=-[a'_x(x-t,y-t)+a'_y(x-t,y-t)]e^{-t}-a(x-t,y-t)e^{-t}+f(t,x,y,u)- \\ -\frac{1}{\mu}\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho- \\ -\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_x+f_u u_x+f_y+f_u u_y\right]d\rho. \tag{2.3.17}$$

Ушундай эле жол менен (2.3.16) туюнтмасынын эки бөлүгүн тең x, y тер боюнча дифферецирлеп, төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$u_{tx}+u_{xx}+u_{yx}=a'_x(x-t,y-t)e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}[f_x+f_u u_x]d\rho.$$

$$u_{ty}+u_{xy}+u_{yy}=a'_y(x-t,y-t)e^{-t}+\int_0^t e^{-(t-\rho)}\left[f_y+f_u u_y\right]d\rho. \tag{2.3.18}$$

(2.3.17) жана (2.3.18) туюнтмаларын мүчөлөп кошсок төмөнкү келип чыгат:

$$u_{tt}+2(u_{tx}+u_{ty}+u_{xy})+u_{xx}+u_{yy}=-a(x-t,y-t)e^{-t}- \\ -\int_0^t e^{-(t-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho+f(t,x,y,u). \tag{2.3. 19}$$

(2.3.19) дан, (2.3.16) ны эске алуу менен , (2.3.11)ди алабыз. (2.3.13)-(2.3.15)тен төмөнкүлөр келип чыгарын байкайбыз:

$$\mathrm{u}(0,\mathrm{x},\mathrm{y})=\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y}),$$

$$\mathrm{u}_t(0,\mathrm{x},\mathrm{y})=\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})=-[\varphi'_x(\mathrm{x},\mathrm{y})+\varphi'_y(\mathrm{x},\mathrm{y})]+\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{y}). \tag{2.3.20}$$

(2.3.20)дон $\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})+\varphi'_x(\mathrm{x},\mathrm{y})+\varphi'_y(\mathrm{x},\mathrm{y})$ экендиги келип чыгат.

Жогорудагы жол менен (2.3.11)-(2.3.13) Коши маселеси, экинчи турдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдмесин (2.3.14) чыгарууга алынып келинди.

(2.3.14) теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

$$\Omega=\left\{u(t,x,y): u(t,x,y)\in\overline{C}^{(2,2,2)}\left([0,T]\times R\times R\right)\cup\|u\|\leq h\right\}$$ болсун,

мында h чоңдугун кийинчерээк аныктайбыз. Белгилөө жургүзөбүз:

$$\left\|\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\frac{s}{\mu}}a(x-t,y-t)ds\right\|=q, \tag{2.3.21}$$

жана h чоңдугун $q+MT\leq h$ барабарсыздыгынан аныктайбыз. (2.3.22)

(2.3.14) төн (Т) шартынын негизинде, төмөндөгү баалоону алабыз:

$$\|u\|\leq q+M\left\|\int_0^t e^{-\frac{1}{\mu}s}\int_0^s e^{\frac{1}{\mu}\rho}\frac{1}{\mu}d\rho ds\right\|\leq q+MT\leq h. \tag{2.3.23}$$

Pu бул - (2.3.14) теңдемесинин оң жагын түшүндүрөт дейли. (2.3.22), (2.3.23) дөн Pu оператору Ω көптүгүн өзүнө-өзүн чагылтары келип чыгат. Эми Pu оператору кысуу оператору экендигин көргөзөбүз. (2.3.14) төн (Т) шартын эске алып төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\|Pu_1-Pu_2\|\leq\left\|\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}\left[f(\rho,x-t+\rho,u_1(\rho,x-t+\rho))-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f(\rho,x-t+\rho,u_2(\rho,x-t+\rho))\right]\right\|d\rho ds\leq L\|u_1-u_2\|\cdot\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}d\rho ds=LT\|u_1-u_2\|.$$

$T_0<T$ чоңдугун $LT_0<1$, (2.3.24)

барабарсыздыгы аткарыла тургандай тандайбыз.

Демек, (2.3.14) экинчи түрдөгү сызыктуу эмес Волтерра интегралдык теңдемеси кысып чагылтуу принцибинин негизинде жалгыз чыгарылышка ээ болот.

Теорема 2.3.2. (Т) шарты орун алсын. Анда $\exists T_0>0$ жашап, (2.3.11)-(2.3.13) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот жана: $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$.

Натыйжа 2.3.2. Эгерде (2.3.11)нын оң жагы f, u дан көз каранды болбосо, анда (2.3.10)-(2.3.13) маселесинин чыгарылышы квадуратураларда табылат:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}a(x-s,y-s)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho)d\rho ds.$$

2.3.2. натыйжасынын далилдөөсү (2.3.14) катнаштыктан келип чыгат.

§ 2.4. Үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин жашашынын жетишээрлик шарттары

I. Бул иште үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин жашашынын жетишээрлик шарттары табылды**.**

Үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемени карайлы:

$$u_{xxt}+2\beta u_{xt}+\alpha u_{xx}-\beta^2u_t+2\alpha\beta u_x+\alpha\beta^2u=f(t,x,u) \qquad (2.4.1)$$

баштапкы шарты менен $u(0,x)=\varphi(x)$, (2.4.2)

мында $\alpha,\beta\in R_+$.

(M) **Шарт.** $f(t,x,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R])\cap Lip(L_u),\quad \frac{2L_u}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta}<1.$

(2.5.1) -(2.5.2) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds, \qquad (2.4.3)$$

мында $c(t,x)$, $c(0,x)=\varphi(x)$ барабардыгы орун алуучу белгилүү функция, $Q(t,x)$ - аныктоону талап кылган белгисиз жаңы функция.

Теорема 2.4.1. (M) шарты орун алсын. Анда (2.4.1) айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемеси (2.4.2) баштапкы шарты менен чыгарылышка ээ болот:

$$u(t,x)\in \overline{C}^{(2,1)}([0,T\times R]),$$

жана (2.4.3) түрдөгү интегралдык көрүнүш аткарылат.

Далилдөө. $Q(t,x)$ функциясын аныктоо үчүн (2.4.1) теңдемесине (2.4.3)тү алып барып коюу керек. Бул максатта төмөндөгү катыштыкты табабыз:

$$\begin{aligned} u_x = c_x - \beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds - \\ -\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\cos(x-v)Q(s,v)dvds. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Мындан (2.4.3) тү эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$u_t = c_t + (-\alpha)\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]Q(s,v)dvds +$$

$$+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]Q(t,v)dv,$$

$$u_x = c_x - \beta(u-c) - \int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\cos(x-v)Q(s,v)dvds. \tag{2.4.5}$$

(2.4.5)тин эки жагын тең x боюнча дифференцирлеп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} u_{xx} = c_{xx} - \beta(u_x - c_x) + \beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\cos(x-v)Q(s,v)dvds - \\ -\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(s,v)dvds - \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Мындан (2.4.5) ти эске алып:

$$\begin{aligned} u_{xx} = c_{xx} - \beta(u_x - c_x) + \beta[-(u_x - c_x) - \beta(u-c)] - \\ -\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(s,v)dvds - \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(x,s)ds. \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

(2.4.7) катнаштыктын эки жагын t боюнча дифференцирлеп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\begin{aligned} u_{xxt} = c_{xxt} - \beta(u_{xt} - c_{xt}) + \beta[-(u_{xt} - c_{xt}) + \beta(u_t - c_t)] - \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,t)dv + \\ +\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,s)dvds + Q(t,x) + \alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(x,s)ds. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

(2.4.8) деги окшош мүчөлөрдү топтоштуруп төмөнкүнү алабыз:

$$u_{xxt}+2\beta u_{xt}-\beta^2 u_t=c_{xxt}+2\beta c_{xt}-\beta^2 c_t+Q(t,x)-\int_0^x e^{-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,t)dv+$$
$$+\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,s)dvds+\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(x,s)ds. \tag{2.4.9}$$

(2.4.7) катнаштыкты алдын ала эки жагын тең α көбөйтүп жана мүчөлөп кошуп (2.4.9) барабардыгы менен, төмөнкүнү алабыз:

$$u_{xxt}+2\beta u_{xt}-\beta^2 u_t+\alpha u_{xx}+2\alpha\beta u_x+\alpha\beta^2 u=c_{xxt}+2\beta c_{xt}-\beta^2 c_t+$$
$$+\alpha c_{xx}+2\alpha\beta c_x+\alpha\beta^2 c+Q(t,x)-\int_0^x e^{-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,t)dv. \tag{2.4.10}$$

Анда (2.4.1) теңдемесинен , (2.4.3), (2.4.10) ди эске алуу менен сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесин алабыз

$$Q(t,x)=f\left(t,x,c+\int_0^x\int_0^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds\right)-$$
$$-H(t,c(t,x))-\alpha\int_0^x e^{-\beta(x-v)}\sin(x-v)Q(v,t)dv\equiv P(Q), \tag{2.4.11}$$

мында төмөнкү белгилөө жүргүзүлгөн $H(t,x)=c_{ttx}+2\beta c_{tx}-\beta^2 c_t+\alpha c_{xx}+2\alpha\beta c_x+\alpha\beta^2 c.$

Экинчи типтеги сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесин (2.4.11) кысып чагылтуу принциби менен чыгарабыз. Мейли:

$$Q=\left\{Q(t,x): Q(t,x)\in\bar{C}\left(\left[0,T_0\right]\times R\right)\cap\|Q(t,x)\|<h\right\},$$

мында T_0, h чоңдуктары бир аздан соң аныкталат.

Эгерде T_0, h чоңдуктарынын маанисин аныктасак:

$$\|P[Q]\|=\|f(t,x,u)-H(t,x)\|+\frac{2}{\beta}h\le h,$$

Анда $P[Q]: Q\to Q$. Жыйынтыгында, Q коптүгү $P[Q]$ операторунун жардамы менен өзүнө-өзү чагылат.

Төмөнкү айырманы баалайлы:

$$\|P[Q_1]-P[Q_2]\|\le\left\|\left[f\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q_1(s,v)dvds\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\alpha\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]Q_1(v,t)dv\right]-$$

$$-\left[f\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q_2(s,v)dvds \right)- \right.$$

$$\left. -\alpha\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]Q_2(v,t)dv \right]\Bigg\| \le$$

$$\le L_u\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]\left|Q_1(v,s)-Q_2(v,s)\right|dvds+$$

$$+\alpha\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]\left|Q_1(v,s)-Q_2(v,s)\right| \le$$

$$\le L_u\left\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\right\|\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\left[1-\sin(x-v)\right]dvds+\frac{2}{\beta}\le$$

$$\le(\frac{2L_u}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta})\left\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\right\|,$$

мында $|\sin(t-s)|\le 1$ барабарсыздыгы бардык $(t,x)\in\{[0,T_0]\times R\}$ үчүн эске алынды. Анда *(M)* шартынын негизинде жана кысып чагылтуу принциби боюнча (2.4.11) сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемеси бардык $(t,x)\in\{[0,T_0]\times R\}$ үчүн жалгыз чыгарылышка ээ болот $Q(t,x)\in Q$.

Андан ары, (2.4.1)- (2.4.2) Коши маселесинин чыгарылышынын бардык туундуларынын чектелгенин далилдейбиз. (2.4.3) төн барабарсыздык алабыз:

$$\|u(t,x)\|\le\|c(t,x)\|+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\,\|[1-\sin(x-v)]\|\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}Q(s,v)dvds\le$$

$$\le C_0+\frac{h}{\alpha\beta}=M_1=const.$$

(2.4.4)төн төмөнкүнү алабыз:

$$\|u_x\|\le\|c_x\|+\Bigg\|\beta\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds-$$

$$-\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}\cos(x-v)Q(s,v)dvds\Bigg\|\le M_2=const.$$

(2.4.3) төн:

$$\|u_t\| \le \|c_t\| + \left\| (-\alpha)\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} \left[1-\sin(x-v)\right] Q(s,v)dvds \right\| +$$
$$+ \left\| \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} \left[1-\sin(x-v)\right] Q(t,v)dv \right\| \le$$
$$\le M_3 = const.$$

(2.4.6) дан:

$$\|u_{xx}\| \le \|c_{xx}\| + \left\| \beta(u_x - c_x) + \beta \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} \cos(x-v) Q(s,v)dvds - \right.$$
$$\left. - \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} \sin(x-v)Q(s,v)dvds - \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(s,x)ds \right\| \le$$
$$\le M_4 = const.$$

Ушундай эле түрдө (2.4.8)ден төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|u_{xxt}\| \le \|c_{xxt}\| + \left\| \beta(u_{xt} - c_{xt}) + \beta[-(u_{xt} - c_{xt}) + \beta(u_t - c_t)] - \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)} \sin(x-v) Q(v,t)dv + \right.$$
$$\left. + \alpha \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)} \sin(x-v) Q(v,s)dvds + Q(t,x) + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} Q(x,s)ds \right\| \le$$
$$\le M_5 = const.$$

Чындыгында талап кылынган далилденди.

II. Үчүнчү тартипте айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулук көйгөйү жана алардын интегралдык көрүнүшү каралган.

Теңдемени карайлы:

$$u_{ttx} + 2\alpha u_{tx} + (\alpha^2+1)u_x + \beta u = f(t,x,u) + \int_0^t K(t,\tau,x,u(s,x))ds, \qquad (2.4.12)$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad (2.4.13)$$

$$u_t(0,x) = \psi(x), \qquad (2.4.14)$$

мында $\alpha,\ \beta \in R_+$.

(A) **Шарт.**

$f(t,x,u) \in \overline{C}([0,T]) \times R \times R \times R \times R) \cap Lip(L_u)$,

$K(t,\tau,x,u) \in \overline{C}((0 \le \tau \le t \le T]) \times R \times R \times R) \cap Lip(N_u)$, $\dfrac{T}{\alpha} + \dfrac{L+NT}{\alpha\beta} < 1.$

(2.4.12)-(2.4.14) маселенин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x (t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(s,v)dvds, \qquad (2.4.15)$$

мында $c(t,x)$ - белгилүү функция, $c(0,x)=\varphi(x),\ c_t(0,x)=\psi(x)$ болуучу, $Q(t,x)$ - аныктоону талап кылган жаңы белгисиз функция. Анда

Теорема 2.4.2. (А) шарты аткарылсын. (2.4.12) үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемеси (2.4.13)-(2.4.14) баштапкы шарттары менен төмөнкү чыгарылышка ээ:

$$u(t,x)\in \overline{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R),$$

жана ал (2.4.15) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болот.

Далилдөө. (2.4.15)тү (2.4.12)ге алып барып коебуз.(2.4.15)түн t боюнча айрым туундусу:

$$\begin{aligned}u_t=c_t+(-\alpha)\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}(t-s)Q(v,s)dvds+\\ +\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds.\end{aligned} \qquad (2.4.16)$$

Мындан (2.4.15) тү эске алып: $u_t=c_t-\alpha(u-c)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds.$ (2.4.17)

(2.4.15)түн x боюнча айрым туундусу:

$$u_x=c_x+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}(t-s)Q(v,s)dvds-\beta(u-c). \qquad (2.4.18)$$

Андан кийин (2.4.17) нын x боюнча айрым туундусу:

$$\begin{aligned}u_{tx}=c_{tx}-\alpha(u_x-c_x)+(-\beta)\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds+\\ +\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(v,s)ds.\end{aligned} \qquad (2.4.19)$$

(2.4.17) нын эки жагынан тең t боюнча айрым туундусун табабыз:

$$u_{tt}=c_{tt}-\alpha(u_t-c_t)+\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}Q(v,t)dv+(-\alpha)\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds$$

же (2.4.15) тү эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u_{tt}=c_{tt}-\alpha(u_t-c_t)+\int_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\nu)}Q(\nu,t)d\nu+$$
$$+(-\alpha)\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}Q(\nu,s)d\nu ds. \qquad (2.4.20)$$

(2.4.20) чы катнаштыктын эки жагын тең x боюнча дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз:

$$u_{ttx}=c_{ttx}-\alpha(u_{tx}-c_{tx})+Q(t,x)+$$
$$+\alpha\beta\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}Q(s,\nu)d\nu ds+(-\alpha)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds. \qquad (2.4.21)$$

(2.4.19)чу теңдемени алдын ала 2α га көбөйтүп, (2.4.21) менен мүчөлөп кошуп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$c_{ttx}+Q(t,x)+\alpha\beta\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}Q(s,\nu)d\nu ds+(-\alpha)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(s,x)ds-\alpha(u_{tx}-\mathrm{c}_{tx})+$$
$$\alpha u_x+\alpha\left[c_{tx}-\alpha(u_x-c_x)+(-\beta)\int_0^t\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}Q(\nu,s)d\nu ds+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(\nu,s)\,ds\right]= \qquad (2.4.22\ )$$
$$=c_{ttx}+Q(t,x)-\alpha^2(u_x-c_x).$$

(2.4.18)ни эске алуу менен, (2.4.15) төн төмөнкүнү алабыз:

$$(\alpha^2+1)u_x+\beta u=\alpha^2u_x+\left[c_x+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}(t-s)Q(\nu,s)d\nu ds-\beta(u-c)\right]+\beta u=$$
$$=c_x+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}(t-s)Q(\nu,s)d\nu. \qquad (2.4.23)$$

.

Белгилөө жүгүзөлүү: $H(t,x)\equiv c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+(\alpha^2+1)c_x+\beta c.$ (2.4.24)

Анда (2.4.12)ден, (2.4.15)тү эске алуу менен, (2.4.22)-(2.4.24)төн төмөнкү сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин алабыз:

$$Q(t,x)=f\left[t,x,\bullet\right]+\int_0^t K(\mathrm{t},\tau,x,\bullet)d\nu-H(t,x)\equiv P[Q], \qquad (2.4.25)$$

Мында

$(\bullet)$ символу, (2.4.15) тин оң жак бөлүгүн түшүндүрөт.

(2.4.25) сызыктуу эмес, экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин кысып чагылтуу принциби менен чыгарылышын табабыз. Мейли:

$$Q=\left\{Q(t,x):Q(t,x)\in\bar{C}\left(\left[0,T_0\right]\times R\right)\cap\left\|Q(t,x)\right\|<h\right\},$$

Мында $T_0,\ h$ чоңдуктары бир аздан соң аныкталат.

Эгерде $T_0,\ h$ чоңдуктарын төмөнкүдөй аныктасак

$$\left\|P\left[Q\right]\right\|=\left\|f\left[t,x,\bullet\right]+\int_0^t K(\mathrm{t},\tau,x,\bullet)d\nu-H(t,x)\right\|\le h,$$

анда: $P\left[Q\right]$: $Q\to Q$. Жыйынтыгында, Q көптүгү $P[Q]$ операторунун жардамы менен өзүнө-өзү чагылат.

Айырманы түзөбүз:

$$\left\|P\left[Q_1\right]-P\left[Q_2\right]\right\|\le\left\|f\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}(t-s)Q_1(\nu,s)d\nu ds\right)-\right.$$
$$\left.-f\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}(t-s)Q_2(\nu,s)d\nu ds\right)\right\|+$$
$$\left\|\int_0^t K\left(t,\tau,x,c+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}(t-s)Q_1(\nu,s)d\nu ds\right)-\right.$$
$$\left.-\int_0^t K\left(t,\tau,x,c+\int_0^\tau\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}(t-s)Q_2(\nu,s)d\nu ds\right)\right\|\le$$
$$\le\left(\frac{T}{\alpha}+\frac{L+NT}{\alpha\beta}\right)\left\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\right\|.$$

(А) шартынын негизинде жана кысып чагылтуу принциби боюнча (2.4.25) сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесинин бардык $(t,x)\in\left\{\left[0,T_0\right]\times R\right\}$ тер үчүн жалгыз чыгарылышы жашайт $Q(t,x)\in Q$.

Андан кийин (2.4.12)-(2.4.14) Коши маселесинин чыгарылышынын чектелгенинин далилдейбиз. (2.4.15) төн төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$\left\|u(t,x)\right\|\le\left\|c(t,x)\right\|+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left\|(t-s)\right\|\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}d\nu ds\le C_0+\frac{L}{\alpha\beta}=M_1=const.$$

(2.4.16) тен ээ болобуз:

$$\left\|u_t\right\|\le\left\|c_t\right\|+\left\|(-\alpha)\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}(t-s)Q(\nu,s)d\nu ds\right\|+$$
$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)}Q(\nu,s)d\nu ds\right\|\le M_2=const.$$

(2.4.19) ден ээ болобуз:

$$\|u_{tx}\| \le \|c_{tx}\| + \alpha\|u_t - c_t\| + \left\|(-\beta)\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds\right\| +$$
$$+\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}Q(v,s)ds\right\| \le M_3 = const.$$

Ушундай эле түрдө (2.4.19)ден төмөнкү келип чыгат:

$$\|u_{tt}\| \le \|c_{tt}\| + \alpha\|u_t - c_t\| + \left\|\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-v)}Q(v,t)dv\right\| +$$
$$+\left\|(-\alpha)\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(v,s)dvds\right\| + \|u-c\| \le M_4 = const.$$

Ушундай эле

$$\|u_{ttx}\| \le \|c_{ttx}\| + \alpha\|u_{tx} - c_{tx}\| + \|Q(t,x)\| +$$
$$+\alpha\beta\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(s,v)dvds + (-\alpha)\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\cos(t-s)Q(s,x)ds\Bigg\| \le$$
$$M_5 = const.$$

Чындыгында талап кылынган далилденди.

§ 2.5. Жогорку тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелердин баштапкы маселесинин чыгарымдуулугу жана чыгарылышынын структуралары

Бул параграфта төртүнчү жана бешинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденген жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылган.

I. Параметрлүү төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесин карайлы:

$$u_{ttxy}(t,x,y) + 2\alpha u_{txy}(t,x,y) + \gamma u_{ttx}(t,x,y) + \beta u_{tty}(t,x,y) + 2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y) +$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y) + \alpha^2\beta u_y(t,x,y) + 2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y) + \gamma\beta u_{tt}(t,x,y) + \qquad (2.5.1)$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y) + \alpha^2\gamma u_x(t,x,y) + \alpha^2\beta\gamma u(t,x,y) = f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right) + \int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \qquad (2.5.2)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \tag{2.5.3}$$

мында $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$.

(2.5.1)-(2.5.3) маселесинин чыгарылышын төмөнкгү түрдө издейбиз:

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds, \tag{2.5.4}$$

мында $c(t,x,y)$ - белгилүү функция жана $c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылат, $Q(t,x,y)$ - жаңы изделүүчү функция.

(T)**Шарт.** $f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip(L|_u)$,

$K(t,s,\text{x},\text{y},u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip(L_1|_u)$

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

$$H(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\ c_{ty}(t,x,y)\ +$$
$$+\ \alpha^2c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)\ +\alpha^2\ c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).$$

$c(t,x,y)$ ти тандап алуунун негизинде:

$\max\limits_{[0,T]\times R\times R}\|H(t,x,y)\|<+\infty.$ деп эсептөөгө болот.

(2.5.4) тү (2.5.1)ге коебуз. (2.5.4)түн t боюнча туундусу төмөнкүнү берет:

$$u_t(t,x,y)=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds-$$

$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds,$$

Мындан (2.5.4)түн негизинде:

$$u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds. \tag{2.5.5}$$

(2.5.5)тин эки жагынын тең t боюнча туундусу төмөнкүнү берет:

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu- \qquad (2.5.6)$$
$$-\alpha\int_{0}^{t}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu d\mu ds.$$

(2.5.6) дан, (2.5.5)ни эске алуу менен төмөнкүнү алабыз:

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2c(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu. \qquad (2.5.7)$$

(2.5.7)нин эки жагын тең x боюнча туундусу төмөнкүнү берет:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu d\mu.$$

Мындан (2.5.7) ни эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu-\beta[u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2u(t,x,y)-$$
$$-c_{tt}(t,x,y)-2\alpha c_t(t,x,y)-\alpha^2c(t,x,y)],$$

же

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+2\alpha\beta u_t(t,x,y)+\alpha^2u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+ \qquad (2.5.8)$$
$$+2\alpha\beta c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

(2.5.8)ди y боюнча дифференцирлейли:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+\alpha^2u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2c_{xy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+ \qquad (2.5.9)$$
$$+2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)\,d\nu.$$

Андан ары (2.5.8)ди γ ге көбөйтүп, (2.5.9) менен мүчөлөп топтоштуруп төмөнкүнү алабыз:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)\ +$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \tag{2.5.11}$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)\ +\alpha^2\gamma\, u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

(2.5.11)ден (2.5.1) теңдеменин негизинде, (2.5.4)деги $Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын аныктоо үчүн сызыктуу эмес интегралдык теңдемени алабыз:

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds\right]+ \tag{2.5.12}$$

$$+\int_0^t K(t,s,x,y,c(s,x,y)+\int_0^s\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,d\tau)ds-H(t,x,y)\equiv PQ,$$

(2.5.12) теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонуу менен чыгарабыз.

$$Q=\left\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in C\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cap\left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

Анда, (2.5.12) теңдемесинен $\|PQ\|\le M+N+KT_0$ барабарсыздыгына ээ болобуз, мында $M\equiv\max f(t,x,y,u),\ N\equiv\max\|H(t,x,y)\|, \mathrm{K}\equiv\max\mathrm{K}(t,s,x,y,u)$.

Эгерде T_0 жана hды

$$M+N+KT_0\le h \tag{2.5.13}$$

деп тандасак, анда PQ оператору $PQ:Q\to Q$ болот.

Эми PQ оператору кысуу оператору экендигин көрсөтөбүз. (2.5.11) ден (T) шартын пайдаланып төмөнкүнү алабыз:

$$\|PQ_1-PQ_2\|\le(L+L_1\,t)\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu\,d\mu\,ds\times\|Q_1-Q_2\|\le$$

$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\|Q_1-Q_2\|. \tag{2.5.14}$$

Жогорудагы келтирилген баалоодо төмөнкү барабарсыздыктар колдонулган:

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^{y}e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds\le$$

$$\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma\nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds\le\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

$\alpha,\beta,\gamma \in R_{+}\, u\, T_0$ турактууларын $\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$ барабарсыздыгы орун ала тургандай тандайбыз. Анда (T) шартынын негизинде (2.5.14)төн PQ оператору - Q көптүгүндө кысуу оператору экендиги келип чыгат. (2.5.12) сызыктуу эмес интегралдык теңдемеси кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болору келип чыгат: $Q(t,x,y)\in Q$. Табылган функцияны (2.5.4) ге коюп, (2.5.1)-(2.5.3) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми (2.5.1)-(2.5.3) Коши маселесинин чыгарылышынын дифференциалдык касиеттерин изилдейбиз. Бардык $Q(t,x,y)\in Q$ үчүн (2.5.4) барабардыгынан алынган, төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$\left\|u(t,x,y)\right\|\le\left\|c(t,x,y)\right\|+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x \sin\int_{-\infty}^y (t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds\right\|\le$$

$$\le C_0+\frac{T_0h}{\alpha\beta\gamma}=M_0=const\cdot$$

(2.5.5) тен төмөнкүнү алабыз:

$$\left\|u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)\right\|\le\left\|\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds\right\|\le C_1+\frac{h}{\alpha\beta\gamma}=M_1=const\,.$$

Ушундай эле жол менен (2.5.7) -(2.5.9)дагы (2.5.1) теңдемеге кирген бардык туундуларды бир калыпта чектелгенин далилдөөгө болот.

Ошонтип:

Теорема 2.5.1. (T) шарты аткарылсын. Анда (2.5.1)-(2.5.3) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот $u(t,x,y)\in \bar{C}^{(2,1,1)}([0,T_0]\times R\times R)$, жана аны (2.5.4) көрүнүштө жазууга мүмкүн болот.

Экертүү. Эгерде (2.5.1)теңдемесинде $K(t,s,x,y,u)\equiv 0$ жана сызыктуу болуп калса, б.а. оң жак бөлүгү u дан көз каранды болбосо б.а. $f(t,x,y)$ түрүндө болсо, анда (2.5.1)-(2.5.3) маселесинин чыгарылышын квадратураларда табууга мүмкүн:

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y \sin(t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\left[f(s,\mu,\nu)-H(s,\mu,\nu)\right]d\nu d\mu ds.$$

Бул ырастоо (2.5.12), (2.5.4) дөн келип чыгат .

II. Бул бөлүмдө бешинчи тартипте айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселесинин чыгарымдуулук көйгөйү изилденген. Чыгарылыштардын структурасы интегралдык түрдө алынган.

Бешинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемесин карайлы:

$$u_{ttxxy}+2\alpha u_{txxy}+2\beta u_{ttxy}+2\alpha\beta u_{ttx}+\left(\alpha^2+1\right)u_{xxy}+$$
$$+4\alpha\beta u_{txy}+\beta^2u_{tty}+2\left(\alpha^2+1\right)\beta u_{xy}+2\alpha\beta^2u_{ty}+4\alpha^2\beta u_{tx}+2\alpha\beta^2u_{tt}+ \qquad (2.5.15)$$
$$\beta^2\left(\alpha^2+1\right)u_y+2\alpha\left(\alpha^2+1\right)\beta u_x+4\alpha^2\beta^2u_t+2\left(\alpha^2+1\right)\beta^2u=$$
$$=F(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,v,x,y,u(v,x,y))dv,\ \alpha,\beta,\gamma\in R_+$$

баштапкы шарттары менен:

$$u(0,x,\mathrm{y})=\varphi(x,y), \qquad (2.5.16)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y). \qquad (2.5.17)$$

(K)**Шарт.**

$$F(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right),K(t,v,x,y,u)\in$$
$$\in\bar{C}([0\le v\le t\le T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_2|_u\right),\ \frac{L_1+L_2T+2\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}<1,\ \left\|K(t,v,x,y,u)\right\|\le M_K.$$

(2.5.15), (2.5.16)-(2.5.17) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө изилдейбиз:

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(t-s)\sin(x-\nu)Q(s,\nu,\mu)dsd\nu d\mu, \qquad (2.5.18)$$

мында $\mathrm{Q(t,x,y)}$ - аныктоону талап кылган белгисиз функция, $\mathrm{c(t,x,y)}$ - белгилүү функция жана:

$c(0,x,y)=\varphi(x,y),\ c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылат. Белгилейли:

$$N(t,c)\equiv c_{ttxxy}+2\alpha c_{txxy}+2\beta c_{ttxy}+2\alpha\beta c_{ttx}+\left(\alpha^2+1\right)c_{xxy}+$$
$$+4\alpha\beta c_{txy}+\beta^2 c_{tty}+2\left(\alpha^2+1\right)\beta c_{xy}+2\alpha\beta^2 c_{ty}+4\alpha^2\beta c_{tx}+2\alpha\beta^2 c_{tt}+\beta^2\left(\alpha^2+1\right)c_y+$$
$$+2\alpha\left(\alpha^2+1\right)\beta c_x+4\alpha^2\beta^2 c_t+2\left(\alpha^2+1\right)\beta^2 c\in\bar{C}([0,T]\times R).$$

Андан кийин, $c(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,1)}\left(\left[0,T\right]\times R\times R\right)$ деп алабыз.

$Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын табуу үчүн (2.5.18)тү (2.5.15)ге коебуз. Бул максатта, (2.5.18) тү t боюнча дифференцирлейли:

$$u_t=c_t-\alpha\left(u-c\right)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\cos(t-s)\sin(x-\nu)Q(s,\nu,\mu)dsd\nu d\mu \tag{2.5.19}$$

Мындан t боюнча дифференцирлеп жана алынган үчтүк интегралды (2.5.18),(2.5.19) ди эске алуу менен алмаштырып төмөнкүнү алабыз:

$$u_{tt}+\alpha u_t=c_{tt}+\alpha c_t-\alpha\left[u_t+\alpha\left(u-c\right)-c_t\right]+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu-(u-c). \tag{2.5.20}$$

Андан кийин (2.5.20)ны x боюнча дифференцирлейли:

$$u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+\alpha^2 u_x+u_x=c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+c_x-$$
$$-\beta\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\cos(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu. \tag{2.5.21}$$

(2.5.20) барабардыкты төмөнкүдөй түрдө жазабыз:

$$u_{tt}+2\alpha u_t+\alpha^2 u+u-c_{tt}-2\alpha c_t-\alpha^2 c-c=$$
$$=\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu. \tag{2.5.22}$$

(2.5.21)деги оң жактагы биринчи интегралды (2.5.22)чи формула менен алмаштырып жана x боюнча дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз:

$$u_{ttxx}+2\alpha u_{txx}+\alpha^2 u_{xx}+u_{xx}+\beta\left[u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+\alpha^2 u_x+u_x\right]=$$

$$=c_{ttxx}+2\alpha c_{txx}+\alpha^2 c_{xx}+c_{xx}+\beta\left[c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+c_x\right]+$$

$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\mu)}Q(t,x,\mu)d\mu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu-$$

$$-\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu. \quad (2.5.23)$$

(2.5.22) ди эске алып, (2.5.21)ден төмөнкүнү табабыз:

$$u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+\alpha^2 u_x+u_x+\beta\left[u_{tt}+2\alpha u_t+\alpha^2 u+u\right]=$$

$$=c_{ttx}+2\alpha c_{tx}+\alpha^2 c_x+c_x+\beta\left[c_{tt}+2\alpha c_t+\alpha^2 c+c\right]+$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu\cdot \quad (2.5.24)$$

(2.5.23)ду y боюнча дифференцирлейли:

$$u_{ttxy}+2\alpha u_{txxy}+(\alpha^2+1)u_{xxy}+\beta\left[u_{ttxy}+2\alpha u_{txy}+(\alpha^2+1)u_{xy}\right]+$$

$$=c_{ttxy}+2\alpha c_{txxy}+(\alpha^2+1)c_{xxy}+\beta[c_{ttxy}+2\alpha c_{txy}+(\alpha^2+1)c_{xy}$$

$$+Q(t,x,y)+\beta[\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\nu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,y)d\nu+$$

$$+\gamma\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu]- \quad (2.5.25)$$

$$-\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\nu)}sin(x-\nu)Q(t,\nu,y)d\nu-\gamma\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu\cdot$$

(2.5.24)дун эки жагын тең y боюнча дифференцирлеп, төмөнкүнү алабыз:

$$u_{ttxy}+2\alpha u_{txy}+(\alpha^2+1)u_{xy}+\beta\left[u_{tty}+2\alpha u_{ty}+(\alpha^2+1)u_y\right]=$$

$$=c_{ttxy}+2\alpha c_{txy}+(\alpha^2+1)c_{xy}+\beta\left[c_{tty}+2\alpha c_{ty}+(\alpha^2+1)c_y\right]+$$

$$+\int_{-\infty}^{x} e^{-\beta(x-\nu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,y)d\nu- \quad (2.5.26)$$

$$-\gamma\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}cos(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu$$

.

Андан кийин (2.5.26)чи теңдеменин эки жагын тең β га (2.5.24)чу теңдемени $2\alpha\beta$ га көбөйтүп жана алынган теңдемелерди мүчөлөп кошуп (2.5.25)чи теңдеме менен төмөнкүгө ээ болобуз:

$$
\begin{aligned}
&u_{ttxxy}+2\alpha u_{txxy}+2\beta u_{ttxy}+2\alpha\beta u_{ttx}+\left(\alpha^2+1\right)u_{xxy}+\\
&+4\alpha\beta u_{txy}+\beta^2u_{tty}+2\left(\alpha^2+1\right)\beta u_{xy}+2\alpha\beta^2u_{ty}+4\alpha^2\beta u_{tx}+2\alpha\beta^2u_{tt}+\beta^2\left(\alpha^2+1\right)u_y+\\
&+2\alpha\left(\alpha^2+1\right)\beta u_x+4\alpha^2\beta^2u_t+2\left(\alpha^2+1\right)\beta^2u=N\left(t,c\right)+ \qquad (2.5.27)\\
&+Q(t,x,y)-\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,y)d\nu-\\
&-\gamma\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu.
\end{aligned}
$$

(2.5.18) түн оң жагын символ менен белгилейли:

$$[\cdot]\equiv c(t,x,y)+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(t-s)\sin(x-\nu)Q(s,\nu,\mu)dsd\nu d\mu.$$

(2.5.18), (2.5.27) төрдү эске алуу менен (2.5.15) ден сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин алабыз:

$$
\begin{aligned}
&Q(t,x,y)=-N(t,c)+F(t,x,y,[\cdot])+\int\limits_{0}^{t}K(t,\nu,x,y,[\cdot])d\nu+\\
&+\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\beta(x-\nu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,y)d\nu+ \qquad (2.5.28)\\
&+\gamma\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(x-\nu)Q(t,\nu,\mu)d\nu d\mu\equiv P(Q).
\end{aligned}
$$

(2.5.28) сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонобуз. $Q=\{Q(t,x,y):Q(t,x,y)\in\bar{C}\left([0,T_0]\times R\times R\right)\cap\|Q(t,x,y)\|\le h\}$ болсун.

$T\ ,h$ чоңдуктарын төмөндөгүдөй аныктайбыз

$\|F(t,x,y,u)-N(t,c)\|+M_KT\le h$, где $h\equiv N_0+N_1+M_KT$. Анда $P(Q):Q\to Q$.

Айырманы баалайбыз:

$$\left\|P[Q_1]-P[Q_2]\ \right\|\le\left\|F\left(t,x,c+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(t-\nu)\times\right.\right.$$

$$\times sin(x-s)Q_1(s,\nu,\mu)dsd\nu d\mu\Big)-F\left(t,x,c+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}sin(t-\nu)\times\right.$$

$$\times sin(x-s)Q_1(\nu,s)d\nu ds\Big)\Big\|+\left\|\int_0^t K(t,\nu,x,y,[\cdot]_{Q_1})d\nu-\int_0^t K(t,\nu,x,y,[\cdot]_{Q_2})d\nu\right\|+$$

$$\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\|sin(x-\nu)\|\|Q_1(s,\nu,\mu)-Q_2(s,\nu,\mu)\|d\nu+$$

$$+\gamma\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\|sin(x-\nu)\|\|Q_1(s,\nu,\mu)-Q_2(s,\nu,\mu)\|d\nu d\mu\le$$

$$\le L_1\left\{\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\nu)}\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\mu)}\|sin(t-\nu)sin(x-s)\|\|Q_1(s,\nu,\mu)-Q_2(s,\nu,\mu)\|dsd\nu d\mu\right\}+$$

$$+\gamma\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\|sin(x-\nu)\|\|Q_1(s,\nu,\mu)-Q_2(s,\nu,\mu)\|d\nu d\mu+\frac{2}{\beta}\|Q_1(s,\nu,\mu)-Q_2(s,\nu,\mu)\|+$$

$$+L_2T\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\|Q_1(t,\nu,\mu)-Q_2(t,\nu,\mu)\|\le\frac{L_1+L_2T+2\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}\|Q_1(t,\nu,\mu)-Q_2(t,\nu,\mu)\|,$$

мында $|sin(t-\nu)|\le 1,\ |sin(x-s)|\le 1,$ бардык $(t,x,y)\in\{[0,T_0]\times R\times R\}$ тер үчүн эске алынды. Анда (К)шартынын жана кысып чагылтуу принцибинин негизинде корутундулайбыз, (2.5.28) сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемеси бардык $(t,x,y)\in\{[0,T_0]\times R\times R\}$ тер үчүн жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болот $Q(t,x,y)\in Q$.

Андан кийин (2.5.15)-(2.5.17) Коши маселесинин чыгарылышынын чектелген экендигин далилдейбиз. (2.5.18) төн төмөндөгү барабарсыздыкка ээ болобуз:

$$\|u(t,x)\|\le\|c(t,x)\|+\int_0^t e^{-\alpha(t-\nu)}\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-s)}|sin(t-\nu)|\cdot|sin(x-s)|\times$$

$$\times\|Q(\nu,s)\|d\nu ds\le c_0+\frac{L}{\alpha\beta}=c_1=const.$$

Жыйынтыгында төмөнкү ырастоону алабыз.

Теорема 2.5.2. (К)шарты аткарылсын. Анда сызыктуу эмес айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемеси (2.5.15), (2.5.16) - (2.5.17) баштапкы шарттары менен $u(t,x,y)\in\overline{C}^{(2,2,1)}([0,T_0]\times R\times R)$ чыгарылышка ээ жана аны (2.5.18) көрүнүштө жазууга болот.

§ 2.6. Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктулуугу жана түзүлүшү

Бул параграфта Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктулуугу жана түзүлүшү каралган.

[21,с.117]дөн белгилүү болгондой, эгерде $P(t)$ матрицасы өзүнүн интегралы менен орун алмаштырылса б.а.

$$P(t)\cdot\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau\cdot P(t) \qquad (2.6.1)$$

$t\geq t_0$ болгондо (Лаппо-Данилевскийдин учуру), анда дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылышы

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x, \qquad (2.6.2)$$

мында $P(t)\in C[t_0,\infty)$,төмөнкү формуласы менен берилет:

$$x(t)=\exp\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau\cdot x(t_0). \qquad (2.6.3)$$

Чыгарылыштын (2.6.3)чү түрдөгү интегралдык көрүнүшү, $P(t)$өзгөрүлмөлүү матрицасы менен (2.6.2) системасынын туруктуулугун изилдөөдө ыңгайлуу болуп эсептелет [21, с. 118].

Эгерде пределдик матрицанын

$A=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}P(\tau)d\tau$, $\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,...,n)$ баардык өздүк маанилери

сол жак жарым тегиздикте жайгашкан болсо б.а. $\operatorname{Re}\lambda_i(A)\leq 0$ $(i=1,2,...,n)$, анда (2.6.2) сызыктуу системасы $t\to\infty$ умтулганда асимптотикалык туруктуу экендиги далилденген. Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелердин системасы:

$$t\frac{dx}{dt}=Px, \qquad (2.6.4)$$

мында P- турактуу матрица, фундаменталдык матрицалык чыгарылышка ээ болорун белгилей кетели[14]:

$$x = \mathrm{e}^{P\ln t} = t^P .$$

t^P функциясын төмөндөгүдөй турдө көрсөтүүгө болоору белгилүү:

$$t^P = \sum_{k=1}^{s}\left(z_{k1} + z_{k2} + \ldots + z_{km_k}[\ln t]^{m_k} \right) t^{\lambda_k} ,$$

мында $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ ($\lambda_i \neq \lambda_k$ болгондо $i \neq k,\ i,\ k = 1,2,\ldots,s$) - P матрицасынын мнималдык көп мүчөсү, а z_{kj} $(k = 1,\ 2,\ldots,\ m_s;\ j = 1,\ 2,\ldots,\ s)$ - сызыктуу көз каранды эмес P л-дан көп мүчө болгон турактуу матрицалар. Эгерде P матрицасынын баардык өздүк маанилери $\mathrm{Re}\,\lambda_i = \lambda_i(P) < 0$ катнаштыкты канаатандырса, анда $t \to \infty$ умтулганда (2.6.4)системасы асимптотикалык туруктуу болоору матрицанын Жордандык структурасынан келип чыгат.

Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасын карайлы:

$$t\frac{dx}{dt} = P(t)x , \tag{2.6.5}$$

мында $P(t)$ голоморфтуу матрица $|t| \geq |t_0|$ болгондо жана Лаппо-Данилевский тибиндеги шартты канаатандырат:

$$P(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau \cdot P(t) . \tag{2.6.6}$$

(2.6.5) системанын чыгарылышынын структурасын изилдейбиз, мында Демидович [21] сунуштаган усулду ээрчийбиз.

(2.6.5)тин жалпы чыгарылышын төмөнкүдөй түрдө жазууга боло тургандыгын көрсөтөбүз

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau} \cdot x_0 . \tag{2.6.7}$$

$\Omega(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau}$ туюнтмасы (2.6.5) системанын матриcанты болуп эсептелет. Чындыгында эле

$\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{P(\tau)}{\tau} d\tau = \frac{P(t)}{t}$ экендигин эске алып төмөнкү туундуну табалы:

$$\frac{d}{dt}\Omega(t)=\left(e^{\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\right)'=e^{\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\cdot\frac{P(t)}{t}=\frac{P(t)}{t}e^{\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}=\frac{P(t)}{t}\Omega(t). \qquad (2.6.8)$$

Андан сырткары $\Omega(t_0)=E$. (2.6.8)чи формуланы чыгарууда (2.6.6) катнаштык менен аныкталуучу матрицалардын коммутативдүүлүгү эске алынганын белгилеп кетели. Ошентип (2.6.1)системанын жалпы чыгарылышы, (2.6.7) чи формула менен аныкталат.

Андан кийин каалаган $(t_0, t)\in S, S=\{(t, s)\in C: |t|>|s|\geq a\geq t_0\}$ түгөйлөрү үчүн (2.6.1)чи шарт аткарылат жана төмөнкү предел жашайт деп шарт коелу:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln t}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=A.$$

Анда төмөнкү ырастоо аткарылат.

Теорема 2.6.1. Эгерде A пределдик матрицанын бардык өздүк маанилери $\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,...,n)$ сол жак жарым тегиздикте жайгашкан болсо б. а.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)<0 \; (i=1,2,...,n),$$

анда (2.6.5)сызыктуу система $t\to\infty$ умтулганда асимптотикалык туруктуу болот.

Далилдөө. а) (2.6.6)шарттынан S көптүгүндө төмөнкүнү алабыз

$$P(t)\cdot\int\limits_{s}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\int\limits_{s}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot P(t). \qquad (2.6.9)$$

Мындан (2.6.9) ду s өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлейли:

$$P(t)\cdot\left[-\frac{P(s)}{s}\right]=\left[-\frac{P(s)}{s}\right]\cdot P(t),$$

же $P(t)\cdot P(s)=P(s)\cdot P(t)$. Андан кийин, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\cdot\frac{1}{\ln s}\int\limits_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)}{\tau_2}d\tau_2=\frac{1}{\ln s}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau_1}{\tau_1}\int\limits_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_1)\cdot P(\tau_2)}{\tau_2}d\tau_2=$$

$$=\frac{1}{\ln s}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{d\tau_1}{\tau_1}\int\limits_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)\cdot P(\tau_1)}{\tau_2}d\tau_2=\frac{1}{\ln s}\int\limits_{t_0}^{s}\frac{P(\tau_2)}{\tau_2}\cdot d\tau_2\int\limits_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1.$$

Эгерде акыркы барабардыктан $s\to\infty$ умтулгандагы пределге өтсөк төмөнкүнү алабыз:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\cdot A = A\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1\,, \qquad (2.6.10)$$

б.а. A пределдик матрицасы $\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau$ интегралы менен орун алмаштыруучу болуп эсептелет.

б) Төмөнкүдөй шарт коелу: $\frac{1}{\ln t}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau = A + B(t)$ жана $B(t)\to 0$, $t\to\infty$.

A жана $B(t)$ матрицалары орун алмаштыруучу экенине ынаналы. (2.6.10) ду эске алуу менен төмөнкүнү алабыз:

$$A\cdot B(t) = A\cdot\left[\frac{1}{\ln t}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau - A\right] = \frac{1}{\ln t}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot A - A^2 = B(t)\cdot A.$$

(2.6.7) формуласынын негизинде (2.6.5) системанын ар кандай чыгарылышы $x(t)$ төмөнгү көрүнүштө болоорун табабыз:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau}\cdot x(t_0) = \mathrm{e}^{\ln t\cdot A + \ln t\cdot B(t)}\cdot x(t_0)\,.$$

A жана $B(t)$ матрицаларынын орун алмаштыруучу экендигин эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз

$$x(t) = \mathrm{e}^{\ln t\cdot A}\cdot \mathrm{e}^{\ln t\cdot B(t)}\cdot x(t_0)\,. \qquad (2.6.11)$$

Төмөнкү шарт коелу: $\min\limits_{1\le i\le n}\operatorname{Re}\lambda_i(A) = \alpha < 0$ жана $\varepsilon > 0$, мында $\alpha + 2\varepsilon < 0$.

$t \ge T > 0$ үчүн $\|B(t)\| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай кылып, T ны жетишээрлик чоң тандайбыз.

(2.10.11)ден баалоо менен $t \ge T$ болгондо төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\|x(t)\| \le \left\|\mathrm{e}^{\ln t\cdot A}\right\|\cdot\left\|\mathrm{e}^{\ln t\cdot B(t)}\right\|\cdot\|x(t_0)\| \le N\cdot \mathrm{e}^{(\alpha+\varepsilon)\ln t}\cdot \mathrm{e}^{\varepsilon\ln t}\cdot\|x(t_0)\| \le$$
$$\le N\cdot\|x(t_0)\|\cdot \mathrm{e}^{(\alpha+2\varepsilon)\ln t}\,.$$

Мындан төмөнкү келип чыгат: $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$,

бул болсо, (2.6.5) сызыктуу дифференциалдык системасы $t\to\infty$ умтулганда асимптотикалык туруктуу экендигин көрсөтөт.

Көрсөтмө мисал. (2.6.5) теңдемелер системасын карайлы, мында

$$P(t)=\begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

анда

$$\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\begin{pmatrix} -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \end{pmatrix}.$$

(2.6.6) шартын текшеребиз:

$$P(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left(-2+\frac{1}{t}\right)\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right]-\frac{1}{t^2} & \left(-2+\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right)+\frac{1}{t}\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right] \\ \frac{1}{t}\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right]-\frac{1}{t}\left(-2+\frac{1}{t}\right) & -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t_0 t}+\left(-2+\frac{1}{t}\right)\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right] \end{pmatrix},$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot P(t)=\begin{pmatrix} -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+\frac{1}{t} & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & -2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right]\left(-2+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t^2} & \left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{tt_0}\right]\frac{1}{t}+(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0})\left(-2+\frac{1}{t}\right) \\ (-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0})\left(-2+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t}\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right] & -\frac{1}{t^2}+\frac{1}{tt_0}+\left[-2(\ln t-\ln t_0)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0}\right]\left(-2+\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}.$$

Жогорудагы катнаштыктардан белгилүү болгондой Лаппо-Данилевский (2.6.6) түрүндөгү шарт орун алат.

Теореманын б) шартын текшеребиз б.а.,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln t}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\ln t}\begin{pmatrix} 2\ln t_0-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} & 2\ln t_0-\frac{1}{t}+\frac{1}{t_0} \end{pmatrix}.$$

Биздин учурда $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B(t) = \frac{1}{\ln t} \begin{pmatrix} 2\ln t_0 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \\ -\frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} & 2\ln t_0 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t_0} \end{pmatrix}$. Байкалып тургандай $B(t) \to 0$ умтулат, $t \to \infty$ умтулганда жана $\operatorname{Re}\lambda_i(A) = -2 < 0,\ i = 1,2$. Анда 2.6.1 теореманын негизинде (2.6.5) теңдемесинин, бул көрсөтмө мисалында, бардык чыгарылышы асимптотикалык туруктуу.

2-бап боюнча жыйынтык

Бул бапта чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулун айрым туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин жаңы классына колдонулду жана баштапкы маселесинин чыгарымдуулугунун жетишээрлик шарттары жана алынган чыгарылыштын структурасы табылды.