КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН УЛУТТУК ИЛИМДЕР АКАДЕМИЯСЫ
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТУ
Ж. БАЛАСАГЫН атындагы КЫРГЫЗ УЛУТТУК УНИВЕРСИТЕТИ

Д 01.17.560 Диссертациялык кеңеш

Кол жазма укугунда
УДК 517.9

КЫДЫРАЛИЕВ ТӨРӨГЕЛДИ РАИМЖАНОВИЧ

ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫ ӨЗГӨРТҮП ТҮЗҮҮ УСУЛУН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЖАНА ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН АСИМПТОТИКАЛЫК ТЕОРИЯСЫНДА КОЛДОНУУ

01.01.02-дифференциалдык теңдемелер, динамикалык системалар жана оптималдуу башкаруу

физика-математика илимдеринин кандидаты
окумуштуулук даражасын изденип алуу үчүн жазылган
ДИССЕРТАЦИЯ

Илимий жетекчи: физика- математика илимдеринин доктору, профессор **Байзаков А.Б.**

Бишкек – 2019

МАЗМУНУ

Шарттуу белгилөөлөрдүн жана түшүнүктөрдүн тизмеги

1. Белгилөөлөр

R^n – n-ченемдүү чыныгы евклиддик мейкиндик, анын чекиттери $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (көбүнчө аталышы: вектор-мамыча); $R_+ := (0; +\infty)$; $I_{t_0} = [t_0, +\infty\ ), D = I_0 \times R$;

$\|x\|$ – вектордун нормасы $x = (x_1, \dots x_n)$: $\|x\|_0 = \max\limits_k |x_k|$;

$\|x\|_2$ – вектордун евклиддик нормасы x: $\|x\|_2 = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$;

$\{x \in X : P(x)\}$ –же андан кыскараак $\{x : P(x)\}$ – $P(x)$ үчүн логикалык шарттар канаатандырылган, баардык x чекиттеринин көптүгү;

$\overline{C}^{\alpha, \beta, \dots}(\Omega \to \Lambda)$ –чектелишкен жана тиешелүү тартипке чейин туундусу менен бирге үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги;

M -чектелбеген областагы чектелген функциялардын классынын жогорку чектери; O, o – тартип символдору;

$Lip(L|_u, K|_v, \dots)$ – L коэффициенти менен u өзгөрмөсү боюнча, K коэффициетти менен v өзгөрмөсү боюнча ж.б. Липшица шарттын канаатандыруучу функциялар классы;

Берилген көп өзгөрмөлүү функциялардын төмөнкү индекси – анын тиешелүү аргументи боюнча айрым туундусун белгилейт:

$$\psi_{\xi_k}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\partial \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_k}, \ k = 1, 2, \dots, n;$$

ИТ – интегралдык теңдеме;

ДТ – дифференциалдык теңдеме;

ВИТ- Вольтерра интегралдык теңдеме;

ИДТ – интегро- дифференциалдык теңдеме;

ВИДТ – Вольтерра интегро- дифференциалдык теңдеме;

АТДТ –айрым туундулуу дифференциалдык теңдеме;

АТИДТ – айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме

2. Түшүнүк

Аныктама 1. D областында аныкталган f функциясы $z_0 \in D$ чекитинде голоморфтуу (аналитикалык) деп аталат, эгерде ушул чекиттин айланасында $\exists$ жана f функциясы даражалуу катар түрүндө көрсөтүлсө

$$f(x) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots.$$

Эгерде бул касиет $z_0 \in D$ ар бир чекитинде аткарылса, анда f функциясы D областында голоморфтуу(аналитикалык) деп аталат.

Аныктама 2. $u(t) = \frac{1}{t}\int\limits_{+\infty}^{t} K(t,s,u(s))ds + f(t), \quad t \in [t_0, +\infty]$ (*)

теңдемеси берилсин, мында $K(t,s,u)$ функциясы $G = \{(t,s.u): \ t_0 \le s \le t < +\infty, \ \ |u| \le h, \ \ h > 0\}$ аймагындагы өзгөрмөлөрдүн топтому боюнча үзгүлтүксүз болсун. (*) теңдемесинин $u(t) \to 0, t \to \infty$ шартын канааттандырган бардык чыгарылышын жоголуучу чыгарылыш деп аталат.

Теңдемелерди жана катнаштыктарды нөмерлөө.

Киришүүдөн башкасы, $(l.m.n)$ түрүндө бап жана параграф боюнча жүргүзүлөт, мында l – баптын номери, m – параграфтын жана n –ошол параграфтагы теңдеменин же катнаштыктын номери. Теорема, лемма жана эскертүүлөр үчүн жогорудагыдай эле номерлөө кабыл алынган.

КИРИШҮҮ

Диссертациянын темасынын актуалдуулугу. Изилденген жумуштарды илимий адабияттардан анализдөө менен, сызыктуу эмес айрым туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) теңдемелер, Вольтерра интегралдык жана Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелер теориясынын көптөгөн актуалдуу маселелери дагы эле каралган эмес. Ар түрдүү маселелердин арасында сызыктуу эмес динамикалык системалар теориясында пайда болуучу: айрым туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) теңдемелердеги Коши маселесинин чыгарымдуулугу жана чыгарылыштын түзүлүшү; өзгөчө чекиттин айланасындагы Вольтерра интегралдык теңдемесинин жоголуучу чыгарылышын табуу талашсыз актуалдуу маселелердин бири болот.

Диссертация темасынын ири илимий программалар жана негизги илимий-изилдөө иштер менен байланышы. КР УИАнын теориялык жана прикладдык математика институтунун проектери алкагында даярдалган: «Компьютердик моделдөөнүн өнүгүшү жана колдонмолору, динамикалык системалар теориясындагы асимптотикалык жана аналитикалык усулдар, тескери жана экономикалык оптимизация маселелери жана жер титирөөдө ыкчам прогноздоо үчүн географиялык берилиштерди анализдөөдө» (2012-2014гг), № мамкаттоо 0005756.

Жумуштун жыйынтыгы жогорку проектер корутунду жана ортодогу отчетторунда киргизилген.

Изилдөөнүн максаты жана маселелери. Бул диссертациялык жумуш Я.Горн, Э.И.Грудо, Н.А.Магницкий, Я.В.Быков, М.Иманалиев, К.Алымкулов, П.С.Панков, К.Какишов, А.Асанов, Т.М.Иманалиев, А.Б.Байзаковдордун изилдөөлөрүнүн уландысы болуп эсептелет. Иш чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулунун дифференциалдык жана интегралдык теңдемелердин асимптотикалык теориясында колдонууга арналган жана төмөндөгүдөй максаттар коюлган:

- Сызыктуу эмес айрым туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин жаңы классы үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугун жана чыгарылыштын түзүлүшүн изилдөө;
- Коши тибиндеги теңдемелер системасынын чыгарылышынын асимптотикалык туруктуулугун жана түзүлүшүн алуу;
- Сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык жана Вольтерра интегро-дифференциалдык теңдемелеринин чыгарылыштарынын асимптотикалык жана аналитикалык түзүлүшүн табуу;

Иштин илимий жаңылыгы.

- комплекстүү параметрлүү экинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу аныкталды жана түзүлүшү тургузулду;
- буруу чекити бар сингулярдуу козголгон айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселеси чыгарылышка ээ болоорлугунун жетишээрлик шарттары табылды;
- айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугун жана түзүлүшүн тургузуунун жетишээрлик шарттары табылды;
-Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын түзүлүшү жана асимптотикалык туруктулуугу далилденди;
-сызыктуу Вольтерра интегралдык тендемесинин жоголуучу чыгарылышынын асимптотикасы алынды;
-сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесинин жаңы классынын асимптотикасы тургузулду;

Алынган жыйынтыктардын практикалык баалуулугу. Алынган илимий жыйынтыктар сызыктуу эмес дифференциалдык жана интегралдык теңдемелер теориясында жаңылык болуп эсептелинет. Диссертация теориялык мүнөзгө ээ. Диссертациянын жыйынтыгы сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык(интегро-дифференциалдык) теңдемелердин башка бөлүктөрүндө, конкреттүү жыйынтыктарды алуу үчүн ошондой эле динамикалык системалардын колдонуусунда пайдаланышы мүмкүн; КР УИА математика институтунун илимий изилдөөлөрүндө, Ж. Баласагын атындагы КУУда, Б.Ельцин атындагы КОСУ, «Манас» атындагы КТУда жана КР ЖОЖдун математикалык адистиктери үчүн атайын курстарды иштеп чыгууда да колдонулушу мүмкүн.

Иштин коргоого сунушталган негизги жоболору:

1. Комплекстүү параметрлүү экинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугун аныктоо жана түзүлүшүн тургузуу;

2. Буруу чекити бар сингулярдуу козголгон айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселеси чыгарылышка ээ болоорлугунун жетишээрлик шарттарын табуу;

3. Жогорку тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугун жана түзүлүшүн тургузуунун жетишээрлик шарттарын табуу;

4. Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын түзүлүшүн жана асимптотикалык туруктулуугун далилдөө;

5. Сызыктуу Вольтерра интегралдык тендемесинин жоголуучу чыгарылышынын асимптотикасын алуу;

6. Сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесинин жаңы классынын асимптотикасын тургузуу.

Изденүүчүнүн өздүк салымы. Диссертациянын бардык жыйынтыктары изденүүчүгө таандык. Маселелердин коюлушу илимий жетекчиге таандык.

Илимий ишти апробациялоо. Бул диссертациянын жыйынтыктары төмөндөгү семинарларда талкууланган жана билдирилген: КР УИА математика институту, Ж. Баласагын атындагы КУУнун математика, информатика жана кибернетика факультетинин дифференциалдык теңдемелер кафедрасында жана төмөнкү конференциаларда: II Эл аралык илимий конференция «Башкаруу теориясынын, топологиянын жана оператордук теңдемелердин актуалдуу проблемалары», Кыргыз-Орус Славян Университетинин түзүлгөндүгүнүн 20-жылдыгына жана Кыргызстанда математикалык мектепти түзүүчү профессор Я. В. Быковдун 100-жылдыгына арналган, Бишкек, 2013ж., Бүткүл дүйнөлүк түрк дүйнөсүнүн V математиктер конгресси, Ысык-Көл, Аврора, 2014ж., Эл аралык Ысык-Көл математикалык форуму, Ысык-Көл, Аврора, 2015ж., Бүткүл дүйнөлүк түрк дүйнөсүнүн VI математиктер конгресси, Астана, 2017ж., Эл аралык илимий конференция «II Борубаевдик окуу», Бишкек, 2018ж.

Диссертациянын жыйынтыктары жарыя наамаларда толук чагылдырылышы. Диссертациянын негизги мазмуну 9 макалада: [41-46,50,82-83] жана 7 тезистик докладда [47-49,84-87] жарыяланган.

Биргелешип жарыялаган эмгектерде маселелердин коюлушу илимий жетекчиге, алынган негизги жыйынтыктар жана баалоолор изденүүчүгө таандык.

Диссертациянын көлөмү жана түзүлүшү. Диссертация шарттуу белгилөөлөрдөн, киришүүдөн, параграфтарга бөлүнгөн үч баптан, корутундуудан, 96 аталышты кармаган адабияттардын тизмегинен турат. Текстин көлөмү 98 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНЫН МАЗМУНУН КЫСКАЧА БАЯНДАМАСЫ.

Биринчи бапта негизги аныктамалар жана түшүнүктөр келтирилген, жыйынтыктар баяндалган: айрым туундулуу дифференциалдык (интегро-дифференциалдык) тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын жашоо теориясы; Өзгөчө чекити менен сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесинин аналитикалык жана асимптотикалык теориясы.

Диссертациянын экинчи бапында айрым туундулуу дифференциалдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденди.

§2.1 параграфта комплекстүү параметрлүү экинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу жана чыгарылыштын түзүлүшү изилденди:

$$\left(u_{tt}+u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}\right)+\alpha\left(u_t+i(u_x+u_y)\right)=f(t,x,y,u), \tag{2.1.1}$$

мында

$$i=\sqrt{-1},$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x)=\varphi(x,y), \tag{2.1.2}$$

$$u_t(0,x,y)+u_x(0,x,y)+u_y(0,x,y)=\psi(x,y). \tag{2.1.3}$$

Белгилөө жургүзөбүз

$$u_t+i(u_x+u_y)\equiv z(t,x,y) \tag{2.1.4}$$

Айырмасын түзөбүз

$$z_t-i(z_x+z_y)=u_{tt}+u_{xx}+u_{yy}+2u_{xy} \tag{2.1.5}$$

(2.1.4) жана (2.1.5) эске алуу менен (2.1.1) теңдемени төмөнкүдөй жазабыз

$$z_t-i(z_x+z_y)+\alpha z=f(t,x,y,u) \tag{2.1.6}$$

(2.1.6) теңдеменин чыгарылышы төмөнкү формула боюнча табылат:

$$\begin{aligned} z(t,x,y)&=e^{-\alpha t}\psi(x+it,y+it)+\\ &+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}f(s,x+i(t-s),y+i(t-s),u(s,x+i(t-s),y+i(t-s))ds. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

(L) **Шарт.** Төмөнкү аткарылсын:

$$Q=\left\{u(t,x,y):u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(G_{T_0}\times C\times C\right)\cap\|u\|\le h\right\}.$$

(2.1.1)-(2.1.3) баштапкы маселесинин изделүүчү чыгарылышын төмөндөгү көрүнүштө көрсөтүүгө болот:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-it,y-it)+\int_0^t z\left(\rho,x-i(t-\rho),y+i(t-\rho)\right)d\rho\,. \tag{2.1.11}$$

Теорема 2.1.1. (L) шарты аткарылсын. Анда (2.1.1)-(2.1.3) баштапкы маселеси (2.1.11) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болгон

$$u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(G_{T_0}\times C\times C\right)$$

чыгарылышына ээ.

II. Айрым туундулуу экинчи тартиптеги сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышы изилденген:

$$u_{tt}(t,x,y)+2(u_{tx}(t,x,y)+u_{ty}(t,x,y))+u_{xx}(t,x,y)+2u_{xy}(t,x,y)+u_{yy}(t,x,y)+$$
$$+u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+u_y(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y)) \qquad (2.1.20)$$

баштапкы шаттары менен

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \qquad (2.1.21)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y). \qquad (2.1.22)$$

(T) Шарт. $\boldsymbol{\varphi}(x,y),\ \boldsymbol{\psi}(x,y)\in\bar{C}^2(R\times R)$ жана

$$f(t,x,u)\in Lip\left(L_u\right)\cap\bar{C}^{(1,1)}\left([0,T]\times R\times R\times R\right),$$
$$LT_0<1, T_0<T_0.$$

(T) шарты боюнча (2.1.20)-(2.1.22) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык тендемесин алууга болорун көргөзөбүз:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}\eta(x-t,y-t)ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))d\rho d\rho\equiv Pu. \qquad (2.1.23)$$

Теорема 2.1.2. Эгерде (T) шарты аткарылса, анда (2.1.20)-(2.1.22) баштапкы маселеси (2.1.23) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болгон жалгыз чыгарылышка ээ:

$$u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,2)}\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right).$$

III. Андан ары, төмөнкү теңдемелер системасы:

$$u_t(t,x,y)+u_x(t,x,y)+A(t,x,y)u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y)),\ t\in\left[0,T\right],\ x,y\in R, \qquad (2.1.35)$$

үчүн Коши маселесин карайбыз, баштапкы шарт:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y)\ , \qquad (2.1.36)$$

мында $f(t,x,y,u)-$ берилген n өлчөмдүү вектор-функция.

(C) **Шарт.** Мейли:

$A(t,x,y)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\right)$,

$f(t,x,y,u)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\times R\right)\cap Lip\left(L|_u\right)$, $\varphi(x,y)\in\bar{C}^{1,1}(R\times R)$.

(C) шартынан

$\|A(t,x,y)\|\le M_A=const$

экенин алабыз.

(2.1.35), (2.1.36) Коши маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-\alpha(t-s)+\beta s}Q(s,x-t+s,y-t+s)ds, \qquad (2.1.37)$$

Мында Q – белгисиз функция, α,β -кандайдыр бир оң сандар.

Теорема 2.1.3. (C) шарты аткарылсын. Анда $\exists\, T_0>0$ табылып, (2.1.35), (2.1.36) Коши маселесинин (2.1.37) түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон жалгыз чыгарылышы жашайт: $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$

§2.2. параграфта буруу чекити бар сингулярдуу козголгон айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселеси чыгарылышка ээ болоорлугу каралган:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\sin nt\,u(t,x)=f(t,x,u(t,x))+\int_0^t K\left(t,s,u(s,x)\right)ds, \qquad (2.2.1)$$

баштапкы шарты менен

$$u(0,x)=\varphi(x). \qquad (2.2.2)$$

(T) **Шарт.** $n\in N$ - бекитилген сан,

$f(t,x,u)\in\bar{C}\left([0,T]\times R\times R\right)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$, $\varphi(x)\in\bar{C}^1(R)$,

$K(t,\tau,u)\in\bar{C}\left((0\le\tau\le t\le T)\times R\right)\cap Lip\left(L_2|_u\right)$.

(2.2.1)-(2.2.2) Коши маселесинин чыгарылышын төмөнкгү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=\varphi(x-t)+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)+\frac{\beta s}{\varepsilon}}\frac{1}{\varepsilon}Q(s,x-t+s)ds, \qquad (2.2.3)$$

Теорема 2.2.1. (Т) шарты аткарылсын. Анда $\exists T_0 > 0$ табылып, (2.2.1), (2.2.2) Коши маселесинин (2.2.3) интеграл түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болгон жалгыз чыгарылышы жашайт:

$$u(t,x) \in \overline{C}^{(1,1)}([0,T_0] \times R) .$$

§2.3. параграфта экинчи тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугунун жетишээрлик шарттары изилденген:

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} + 2u_{xy} = \lambda \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} K(t,x,y,\rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu)) d\nu d\gamma d\rho \tag{2.3.1}$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y), \tag{2.3.2}$$

$$u_t(0,x,y) = \psi(x,y), \ \ x,y \in R . \tag{2.3.3}$$

(В) **Шарт.** Функциялар $\varphi(x,y), \ \ \psi(x,y) \in C^2(R \times R)$ жана $K(t,x,y,\rho,\gamma,\nu,u) \in \overline{C}^{(2,2,2,,0,0,0,0)}(D \times D \times R) \cap Lip(L|_u)$ болсун.

(2.3.1)-(2.3.3) Коши маселеси төмөнкү интегралдык теңдемеге эквиваленттүү:

$$u(t,x,y) = \varphi(x-it, y-it) + \int_0^t a(x-i(t-s)+is, y-i(t-s)+is)ds + \tag{2.3.4}$$

$$+\lambda \int_0^t \int_0^s \int_0^T \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} K(s, x+i(t-s)-i(\sigma-s), y+i(t-s)-i(\sigma-s), \rho,\gamma,\nu,u(\rho,\gamma,\nu)) d\rho d\gamma d\nu ds d\sigma \equiv Pu,$$

мында $a(x,y) = \psi(x,y) + i[\varphi_x^{'}(x,y) + \varphi_y^{'}(x,y)]$.

Теорема 2.3.1. (В) шарты аткарылсын, анда $\exists \ \ T_0 > 0$ жашап, (2.3.1)-(2.3.2) Коши маселеси жалгыз чыгарылышка ээ болот жана: $u(t,x,y) \in \overline{C}^{(2,2,2)}([0,T_0] \times R \times R)$.

II. Экинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемесинин Коши маселесинин чыгарылымдуулугун карайбыз:

$$\begin{aligned} & u_{tt} + 2(u_{tx} + u_{ty} + u_{xy}) + u_{xx} + u_{yy} + u_t + u_x + u_y = \\ & = f(t,x,y,u(t,x,y)), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

баштапкы шарттары менен:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2.3.12}$$

$$u'(0,x,y)=\psi(x,y). \tag{2.3.13}$$

(T)**Шарт.** Берилген функциялар төмөнкүдөй болсун деп алалы: $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)\in \bar{C}^2(R)$ жана

$$f(t,x,y,u)\in \mathrm{Lip}\left(L\big|_u\right)\cap \bar{C}^{(1,1,1)}\left(D\times R\times R\right).$$

$\max f(t,x,y,u)\le M,\ M-\mathrm{const.}$ экендиги белгилүү.

Жогорудагы шарттарда (2.3.11)-(2.3.13) Коши маселеси чындыгында төмөнкү түрдөгү сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемеге алынып келинет:

$$\begin{gathered}u(t,x,y)=\varphi(x-t,y-t)+\int_0^t e^{-s}a(x-s,y-s)\,ds+\\+\int_0^t\int_0^s e^{-(s-\rho)}f(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho,u(\rho,x-t+\rho,y-t+\rho))\,d\rho\,ds,\end{gathered} \tag{2.3.14}$$

Мында $a(x,y)=\psi(x,y)+\varphi_x'(x,y)+\varphi_y'(x,y).$

Теорема 2.3.2. (T) шарты орун алсын. Анда $\exists T_0>0$ жашап, (2.3.11)-(2.3.13) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот жана: $u(t,x,y)\in \bar{C}^{(1,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$.

§ 2.4. параграфта үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин жашашынын жетишээрлик шарттары табылган.

I. Үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемени карайлы:

$$u_{xxt}+2\beta u_{xt}+\alpha u_{xx}-\beta^2 u_t+2\alpha\beta u_x+\alpha\beta^2 u=f(t,x,u) \tag{2.4.1}$$

баштапкы шарты менен $u(0,x)=\varphi(x)$, (2.4.2)

мында $\alpha,\ \beta\in R_+$.

(M) **Шарт.** $f(t,x,u)\in \bar{C}([0,T]\times R\times R])\cap Lip(L_u),\quad \dfrac{2L_u}{\alpha\beta}+\dfrac{2}{\beta}<1.$

(2.4.1)-(2.4.2) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}[1-\sin(x-v)]Q(s,v)dvds\,, \qquad (2.4.3)$$

мында $c(t,x)$, $c(0,x)=\varphi(x)$ барабардыгы орун алуучу белгилүү функция, $Q(t,x)$ - аныктоону талап кылган белгисиз жаңы функция.

Теорема 2.4.1. (М) шарты орун алсын. Анда (2.4.1) айрым туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык тендемеси (2.4.2) баштапкы шарты менен чыгарылышка ээ болот:

$$u(t,x)\in\overline{C}^{(2,1)}([0,T\times R])\,,$$

жана (2.4.3) түрдөгү интегралдык көрүнүш аткарылат.

II. Үчүнчү тартипте айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулук көйгөйү жана алардын интегралдык көрүнүшү каралган.

Теңдемени карайлы:

$$u_{ttx}+2\alpha u_{tx}+(\alpha^2+1)u_x+\beta u= f(t,x,u)+\int_0^t K(\mathrm{t},\tau,x,u(s,x))ds, \qquad (2.4.12)$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x)=\varphi(x)\,, \qquad (2.4.13)$$

$$u_t(0,x)=\psi(x)\,, \qquad (2.4.14)$$

мында $\alpha,\ \beta\in R_+$.

(А) **Шарт.**

$$f(t,x,u)\in\overline{C}([0,T])\times R\times R\times R\times R)\cap Lip(L_u),$$

$$K(t,\tau,x,u)\in\overline{C}((0\le\tau\le t\le T])\times R\times R\times R)\cap Lip(N_u),\ \frac{T}{\alpha}+\frac{L+NT}{\alpha\beta}<1.$$

(2.4.12)-(2.4.14) маселенин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x (t-s)e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-v)}Q(s,v)dvds\,, \qquad (2.4.15)$$

мында $c(t,x)$ - белгилүү функция, $c(0,x)=\varphi(x),\ c_t(0,x)=\psi(x)$ аткарылуучу, $Q(t,x)$ - аныктоону талап кылган жаңы белгисиз функция. Анда

Теорема 2.4.2. (А) шарты аткарылсын. (2.4.12) үчүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемеси (2.4.13)-(2.4.14) баштапкы шарттары менен төмөнкү чыгарылышка ээ:

$$u(t,x)\in \overline{C}^{(2,1)}([0,T_0]\times R),$$

жана ал (2.4.15) түрдөгү интегралдык көрүнүшкө ээ болот.

§ 2.5. параграфта төртүнчү жана бешинчи тартиптеги айрым туундулуу дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденген жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылган.

I. Төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро- дифференциалдык тендемеси карайлы:

$$\begin{aligned}&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)+\\&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f\left(t,x,y,u(t,x,y)\right)+\int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,\end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

баштапкы шарттары менен

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \qquad (2.5.2)$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \qquad (2.5.3)$$

мында $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$.

(2.5.1)-(2.5.3) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$\begin{aligned}&u(t,x,y)=c(t,x,y)+\\&+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}\sin(t-s)Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\, d\mu\, ds,\end{aligned} \qquad (2.5.4)$$

мында $c(t,x,y)$ - белгилүү функция жана $c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылат, $Q(t,x,y)$ - жаңы изделүүчү функция.

(Т)**Шарт.** $f(t,x,y,u)\in\overline{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L|_u\right)$,

$K(t,s,x,y,u)\in\overline{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$

$$\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T.$$

Теорема 2.5.1. (Т) шарты аткарылсын. Анда (2.5.1)-(2.5.3) Коши маселеси чыгарылышка ээ болот $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$, жана аны (2.5.4) көрүнүштө жазууга мүмкүн болот.

II. Бешинчи тартиптеги айрым туундулуу сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдемесин карайлы:

$$\begin{gathered}u_{ttxxy}+2\alpha u_{txxy}+2\beta u_{ttxy}+2\alpha\beta u_{ttx}+\left(\alpha^2+1\right)u_{xxy}+\\+4\alpha\beta u_{txy}+\beta^2 u_{tty}+2\left(\alpha^2+1\right)\beta u_{xy}+2\alpha\beta^2 u_{ty}+4\alpha^2\beta u_{tx}+2\alpha\beta^2 u_{tt}+\\\beta^2\left(\alpha^2+1\right)u_y+2\alpha\left(\alpha^2+1\right)\beta u_x+4\alpha^2\beta^2 u_t+2\left(\alpha^2+1\right)\beta^2 u=\\=F(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,v,x,y,u(v,x,y))dv,\ \alpha,\beta,\gamma\in R_+\end{gathered} \tag{2.5.15}$$

баштапкы шарттары менен:

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2.5.16}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y). \tag{2.5.17}$$

(К)**Шарт.**

$$F(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right),K(t,v,x,y,u)\in$$

$$\in\bar{C}([0\le v\le t\le T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_2|_u\right),\ \frac{L_1+L_2T+2\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}<1,\ \|K(t,v,x,y,u)\|\le M_K.$$

(2.5.15), (2.5.16)-(2.5.17) маселесинин чыгарылышын төмөнкү түрдө издейбиз:

$$\begin{gathered}u(t,x,y)=c(t,x,y)+\\+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\nu)-\gamma(y-\mu)}\sin(t-s)\sin(x-\nu)Q(s,\nu,\mu)dsd\nu d\mu,\end{gathered} \tag{2.5.18}$$

мында $Q(t,x,y)$ - аныктоону талап кылган белгисиз функция, $c(t,x,y)$ - белгилүү функция жана:

$c(0,x,y)=\varphi(x,y),\ c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылат.

Теорема 2.5.2. (К)шарты аткарылсын.

Анда сызыктуу эмес айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдемеси (2.5.15), (2.5.16)-(2.5.17) баштапкы шарттары менен $u(t,x,y)\in\bar{C}^{(2,2,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$ чыгарылышка ээ жана аны (2.5.18) көрүнүштө жазууга болот.

§ 2.6. параграфта Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын асимптотикалык туруктуулугу жана түзүлүшү каралган.

Коши тибиндеги дифференциалдык теңдемелер системасын карайлы:

$$t\frac{dx}{dt}=P(t)x, \tag{2.6.5}$$

мында $P(t)$ голоморфтуу матрица $|t|\geq|t_0|$болгондо жана Лаппо-Данилевский тибиндеги шартты канаатандырат:

$$P(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau\cdot P(t). \tag{2.6.6}$$

(2.6.5) системанын чыгарылышынын түзүлүшү изилдейбиз.

Андан кийин каалаган $(t_0,\, t)\in S, S=\{(t,\, s)\in C: |t|>|s|\geq a\geq t_0\}$ түгөйлөрү үчүн (2.6.6)чи шарт аткарылат жана төмөнкү предел жашайт деп шарт коелу:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln t}\int_{t_0}^{t}\frac{P(\tau)}{\tau}d\tau=A.$$

Теорема 2.6.1. Эгерде A пределдик матрицанын бардык өздүк маанилери $\lambda_i=\lambda_i(A)$ $(i=1,2,...,n)$ сол жак жарым тегиздикте жайгашкан болсо б. а.

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(A)<0\ (i=1,2,...,n),$$

анда (2.6.5)сызыктуу система $t\to\infty$ умтулганда асимптотикалык туруктуу болот.

III-бапта чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү усулу Вольтерра интегралдык тендемесинин жана Вольтерра интегро-дифференциалдык тендемесинин чыгарылыштарынын жашашы, өзгөчө чекиттин айланасында аналитикалык жана асимптотикалык түзүлүшүн табуу көйгөйлөрүнө колдонулган.

§3.1 параграфта бир тектүү эмес сызыктуу Вольтерра интегралдык тендемеси $\bar{C}(t_0,+\infty)$ классында каралган:

$$tu(t)=\lambda\int_{+\infty}^{t}u(s)ds+f(t),\ t\in[t_0,+\infty) \tag{3.1.1}$$

Аргументтин чоң маанисинде (3.1.1) дин жоголуучу чыгарылыштарынын асимптотикасын түзүлүшү табылды.

$f(t)$ төмөндөгү шарттардын бирин канаатандырсын:

$\nu = -1$ жана $\forall\sigma > 0$ үчүн

$$\frac{|f(t)|}{t^{\nu}} \to 0, \quad \frac{|f(t)|}{t^{\nu-\sigma}} \to +\infty, \quad t \to +\infty; \tag{3.1.2$_1$}$$

$\nu < -1$ жана $\forall\sigma > 0$ үчүн

$$\frac{|f(t)|}{t^{\nu}} \le A, \quad \frac{|f(t)|}{t^{\nu+\sigma}} \to +\infty, \quad t \to +\infty, \tag{3.1.2$_2$}$$

мында A – бекитилген турактуу сан;

$\nu < -1$ жана $\forall\sigma > 0$ үчүн

$$\frac{|f(t)|}{t^{\nu}} \to +\infty, \quad \frac{|f(t)|}{t^{\nu+\sigma}} \to 0, \quad t \to +\infty; \tag{3.1.2$_3$}$$

$\nu < -1$ жана $\forall\sigma > 0$ үчүн:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{\nu}} = B, \tag{3.1.2$_4$}$$

мында B – кандайдыр бир комплекстүү сан , бирок, B=0 болсо:

$$\frac{f(t)}{t^{\nu-\sigma}} \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

Теорема 3.1.1 I) (3.1.2$_i$)($i=\overline{1,4}$) шартттарынын бири аткарылсын; эгерде $\mathrm{Re}\,\lambda < -1$ болсо, анда (3.1.1) теңдемеси жоголуучу чыгарылышынын бир параметрлүү түркүмүнө ээ; эгерде $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$болсо, анда (3.1.1)теңдемеси жалгыз жоголуучу чыгарылышка ээ. $\mathrm{Re}\,\lambda = -1$ болгондо жана (3.1.2$_1$) аткарылса, (3.1.1) теңдемеси, (3.1.4) тө, $\varepsilon \ne 0$ болсо, жоголуучу чыгарылышка ээ эмес, жана (3.1.4) $\varepsilon = 0$ болсо, анда жалгыз жоголуучу чыгарылышка ээ, $\mathrm{Re}\,\lambda = 1$ болгондо жана (3.1.2$_i$) ($i=\overline{2,\ 4}$) аткарылса , (3.1.1) теңдемеси жалгыз жоголуучу чыгарылышка ээ.

§3.2. параграфта сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесинин чыгарылышынын $t \to +\infty$ умтулганда асимптотикалык түзүлүшү каралат.

Сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесин карайлы

$$tu(t) = \lambda \int_{+\infty}^{t} u(s)ds + \int_{+\infty}^{t} K(t,s,u(s))ds + f(t), \quad t \in [t_0, +\infty], \tag{3.2.1}$$

жана $t \to +\infty$ умтулганда (3.2.1) теңдемесинин чыгарылышынын асимптотикасын издейбиз.

(3.2.1) теңдемеси менен бирге кыскартылган сызыктуу теңдемени карайбыз.

$$tu(t) = \lambda \int_{+\infty}^{t} u(s)ds + f(t). \tag{3.2.2}$$

Төмөнкү учурлар аткарылсын дейли:

a) $f(t)$ функциясы (3.1.2i)($i = \overline{1,4}$) шартттарынын бирин канааттандырсын жана (3.2.2) теңдемеси жоголуучу чыгарылышка ээ болсун.

b) $K(t,s,u)$ функциясы $G = \{(t, s.u): \ t_0 \le s \le t < +\infty, \ |u| \le h, \ h > 0\}$ аймагындагы өзгөрмөлөрдүн топтому боюнча үзгүлтүксүз болсун, $K(t,s,0) \equiv 0$ жана Липшиц шартын канаатандырсын:

$$|K(t,s,u_1) - K(t,s,u_2)| \le N(t,s,\xi)|u_1 - u_2|,$$

мында $\xi = \max|u_1|,|u_2|$, $N(t,s,\xi)$ – терс эмес, өзүнүн ар бир аргументи боюнча монотондуу кемүүчү функция.

c) $u_0(t)$ функциясы (3.1.12) түрүндөгү, (3.2.1) ге тиешелүү кыскартылган (3.2.2) теңдемесинин чыгарылышы болсун жана

$$\frac{1}{t^{\nu}} \int_{+\infty}^{t} \mathrm{v}(s) N(t,s,\mathrm{v}(s)) \to 0, \quad t \to +\infty, \quad |u_0(t)| \le \nu(t) \tag{3.2.4}$$

(3.2.1) теңдемесинин чыгарылышы $t = +\infty$ чекитинин айланасында төмөнкү көрүнүшкө ээ

$$u(t) = u_0(t) + \lambda t^{\lambda-1} \int_{t}^{\bar{\varepsilon}^{-1}} \frac{y(\tau)d\tau}{\tau^{\lambda-\nu+1}} + t^{\nu-1} y(t),$$

б.а. төмөнкү катнаштыкты жаза алабыз:

$$u(t) = u_0(t) + 0(t^{\nu-1}), t \to +\infty. \tag{3.2.16}$$

Теорема 3.2.1. Эгерде a), b) жана c) шарттары аткарылса, анда (3.2.1) теңдемеси (3.2.16) катнаштыкты канааттандырган жоголуучу чыгарылышка ээ.